



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA (UFPB)
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS (CCSA)
DEPARTAMENTO DE FINANÇAS E CONTABILIDADE (DFC)
CURSO DE BACHARELADO EM CIÊNCIAS ATUARIAIS (CCA)

HUGO VIEIRA SÁ FERREIRA GOMES

TEORIA DAS MÚLTIPLAS VIDAS: UMA ABORDAGEM POR DEPENDÊNCIA

JOÃO PESSOA

2024

HUGO VIEIRA SÁ FERREIRA GOMES

TEORIA DAS MÚLTIPLAS VIDAS: UMA ABORDAGEM POR DEPENDÊNCIA

Trabalho de Conclusão de Curso para o curso de Ciências Atuariais na UFPB, como requisito parcial à obtenção do título de bacharel em Ciências Atuariais.

Área de concentração: Matemática Actuarial.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Carlos Santos Júnior.

JOÃO PESSOA

2024

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

G633t Gomes, Hugo Vieira Sá Ferreira.

Teoria das múltiplas vidas: uma abordagem por dependência / Hugo Vieira Sá Ferreira Gomes. - João Pessoa, 2024.

76 f. : il.

Orientação: Luiz Carlos Santos Júnior.

TCC (Graduação) - UFPB/CCSA.

1. Teoria das múltiplas vidas. 2. Tempos futuros de vida. 3. Cálculo atuarial. 4. Seguro de vida. I. Santos Júnior, Luiz Carlos. II. Título.

UFPB/CCSA

CDU 368

HUGO VIEIRA SÁ FERREIRA GOMES

TEORIA DAS MÚLTIPLAS VIDAS: UMA ABORDAGEM POR DEPENDÊNCIA

Trabalho de Conclusão de Curso como requisito parcial à obtenção do título de bacharel em Ciências Atuariais pela Universidade Federal da Paraíba.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
 **LUIZ CARLOS SANTOS JUNIOR**
Data: 01/05/2024 10:13:27-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Luiz Carlos Santos Júnior

Orientador

Universidade Federal da Paraíba (UFPB)

Documento assinado digitalmente
 **AZAMOR CIRNE DE AZEVEDO FILHO**
Data: 03/05/2024 08:07:43-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Azamor Cirne de Azevedo Filho

Membro avaliador

Universidade Federal da Paraíba (UFPB)

Documento assinado digitalmente
 **JOAO VINICIUS DE FRANCA CARVALHO**
Data: 03/05/2024 18:52:18-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. João Vinícius de França Carvalho

Membro avaliador

Universidade de São Paulo (USP)

Agradecimentos

Agradeço a minha mãe, Maria Suelane, por sempre acreditar em mim, por todo o apoio incondicional, por todo o empenho em investir na minha educação e, principalmente, por todo o amor, cuidado e carinho que recebo diariamente. Ao meu pai, Bertolino, por todos os conselhos, por me mostrar o imenso valor de se importar e cuidar do próximo, e pela parceria que construímos nos últimos anos.

Agradeço a toda a minha família, em especial a André, a minha avó Nestorinha e as minhas tias Neinha e Suerda, que sempre cuidaram tão bem de mim. Ao meu avô Bosco (*in memoriam*) e a minha avó Socorro (*in memoriam*), que inspiraram este trabalho. Ao meu irmão João Pedro e as minhas irmãs Júlia e Helena, que me fazem querer ser uma pessoa melhor.

Agradeço a todos que conheci ao longo da graduação e que contribuíram para a minha formação humana e profissional. Agradeço, em especial, a Jackson e a Reginere, que desde o primeiro período tornaram os dias de estudo menos cansativos e as tardes mais alegres. Não poderia imaginar nem pedir por pessoas melhores para compartilhar tantos dias e momentos. E a Vitória, por suas valiosas contribuições durante a elaboração deste trabalho, por nossa colaboração em diversos projetos, pelo companheirismo ao longo dos últimos anos, pelos cafezinhos matinais, enfim, agradeço por ser a pessoa incrível que você é...

Agradeço aos professores do curso, que tanto contribuíram para a minha formação. Agradeço, em especial, ao professor Luiz, por todos os ensinamentos, pela orientação neste trabalho e em vários projetos, por sempre ouvir meus comentários e sugestões, pela atenção e vontade que sempre demonstrou em fazer o melhor para os seus alunos. Agradeço também a professora Vera por me fazer sentir tão bem acolhido na sala de aula, mesmo quando eu não era seu aluno, no projeto de pesquisa e em todos os outros momentos fora da sala de aula.

Tenho muita sorte de ter todos vocês em minha vida, obrigado!

RESUMO

Uma das hipóteses comumente associadas aos cálculos atuariais do ramo vida para grupos é a de que os tempos futuros de vida de cada um de seus membros são independentes. Embora a assunção desta hipótese simplifique os cálculos, a literatura atuarial internacional apresenta evidências de dependência entre os tempos futuros de vida para diversos grupos, como casais e gêmeos, por exemplo. Assim, este trabalho objetivou analisar o efeito da dependência entre os tempos futuros de vida de indivíduos de um mesmo grupo sobre a precificação de rendas (anuidades) para casais. Para isso, foi simulada uma base de dados contendo 2000 contratos, cada um referente a dois segurados, um homem e uma mulher. Para esta base foram simuladas três experiências de mortalidade distintas, resultando em três cenários analisados. Após as simulações, foram realizadas as análises de sobrevivência não paramétrica e paramétrica e, a partir do Teste da Razão de Verossimilhança e do Critério de Informação de Akaike, a distribuição de Gompertz foi considerada a mais adequada para descrever o tempo futuro de vida dos segurados nos três cenários simulados. Com base nessas informações, foi construído um modelo de dependência para cada cenário, utilizando funções cópula selecionadas pelo Critério de Informação de Akaike. Para o Cenário 1, a cópula de Gumbel foi escolhida, enquanto para os Cenários 2 e 3, a cópula de Clayton foi escolhida. Por meio desses modelos foram calculadas as anuidades antecipadas, imediatas e vitalícias para duas vidas sob o status de último sobrevivente, considerando e desconsiderando a hipótese de dependência, além da razão entre os dois casos. Os principais resultados obtidos indicam que as anuidades calculadas considerando a dependência são, em geral, menores do que aquelas que consideram a independência e, em vários casos, se distinguem significativamente. Além disso, observou-se que cada cenário alcançou resultados completamente diferentes, indicando a especificidade de cada população investigada e da assunção ou não da premissa de independência. Por fim, os resultados evidenciaram a relevância do estudo da dependência na precificação de produtos para casais.

Palavras-Chave: Teoria das múltiplas vidas. Tempos futuros de vida. (ln)dependência. Anuidades.

ABSTRACT

One of the hypotheses commonly associated with actuarial calculations in life contingencies for groups is that the future lifetimes of each of its members are independent. Although assuming this hypothesis simplifies calculations, international actuarial literature presents evidence of dependence between future lifetimes for various groups, such as couples and twins, for example. Thus, this study aimed to analyze the effect of dependence between the future lifetimes of individuals within the same group on the pricing of annuities for couples. For this purpose, a database containing 2000 contracts was simulated, each referring to two policyholders, one male and one female. Three different mortality experiences were simulated for this database, resulting in three analyzed scenarios. After the simulations, non-parametric and parametric survival analyses were conducted, and based on the Likelihood Ratio Test and the Akaike Information Criterion, the Gompertz distribution was considered the most suitable to describe the future lifetime of policyholders in the three simulated scenarios. Based on this information, a dependency model was built for each scenario using copula functions selected by the Akaike Information Criterion. For Scenario 1, the Gumbel copula was chosen, while for Scenarios 2 and 3, the Clayton copula was selected. Through these models, whole life immediate annuities due for two lives under the last survivor status were calculated, considering and disregarding the dependency hypothesis, as well as the ratio between the two cases. The main results indicate that annuities calculated considering dependency are generally lower than when considering independence and, in several cases, are significantly different. Additionally, it was observed that each scenario achieved completely different results, indicating the specificity of each model and the assumption or non-assumption of the independence premise. Finally, the results highlighted the relevance of studying dependency in the pricing of products for couples.

Keywords: Multiple lives theory. Future lifetimes. (In)dependency. Annuities.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Logaritmo da mortalidade por tábua.....	43
Figura 2 - Funções de sobrevivência obtidas pelo estimador de Kaplan-Meier para o tempo residual de vida de homens e mulheres no Cenário 1.....	45
Figura 3 - Funções de sobrevivência obtidas pelo estimador de Kaplan-Meier para o tempo residual de vida de homens e mulheres no Cenário 2.....	46
Figura 4 - Funções de sobrevivência obtidas pelo estimador de Kaplan-Meier para o tempo residual de vida de homens e mulheres no Cenário 3.....	47

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Estatísticas descritivas dos segurados	44
Tabela 2 - Resultados dos ajustes paramétricos para o tempo residual de vida de homens, segundo o Cenário 1	48
Tabela 3 - Resultados dos ajustes paramétricos para o tempo residual de vida de mulheres, segundo o Cenário 1	49
Tabela 4 - Resultados dos ajustes paramétricos para o tempo residual de vida de homens, segundo o Cenário 2	49
Tabela 5 - Resultados dos ajustes paramétricos para o tempo residual de vida de mulheres, segundo o Cenário 2	49
Tabela 6 - Resultados dos ajustes paramétricos para o tempo residual de vida de homens, segundo o Cenário 3	50
Tabela 7 - Resultados dos ajustes paramétricos para o tempo residual de vida de mulheres, segundo o Cenário 3	50
Tabela 8 - Resultado da seleção dos modelos de dependência	51
Tabela 9 - Anuidades antecipadas, imediatas e vitalícias sob o status de último sobrevivente no Cenário 1.....	52
Tabela 10 - Anuidades antecipadas, imediatas e vitalícias sob o status de último sobrevivente no Cenário 2.....	53
Tabela 11 - Anuidades antecipadas, imediatas e vitalícias sob o status de último sobrevivente no Cenário 3.....	53

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Seguros sobre a vida sob o status vida conjunta	29
Quadro 2 - Informações dos segurados	35
Quadro 3 - Funções para estudos de sobrevivência	38
Quadro 4 - Cópulas Arquimedianas.....	41
Quadro 5 - Resumo dos resultados da análise paramétrica de sobrevivência	50

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	11
1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO E PROBLEMA.....	11
1.2 OBJETIVOS	12
1.2.1 Objetivo geral	12
1.2.2 Objetivos específicos	13
1.3 JUSTIFICATIVA.....	13
1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO	14
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	15
2.1 O CÁLCULO ATUARIAL DO RAMO VIDA E OS SEUS PRESSUPOSTOS MAIS COMUNS	15
2.1.1 O valor do dinheiro no tempo	16
2.1.2 Tempo futuro de vida	17
2.2 VIDAS INDIVIDUAIS	19
2.2.1 Funções biométricas para uma vida	19
2.2.2 Seguros individuais sobre a vida	20
2.3 TEORIA DAS MÚLTIPLAS VIDAS.....	26
2.3.1 Probabilidades para duas vidas	27
2.3.2 Seguros sobre a vida para duas vidas	28
2.4 DEPENDÊNCIA ENTRE OS TEMPOS FUTUROS DE VIDA.....	30
3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	34
3.1 TIPO DE PESQUISA E SIMULAÇÃO DOS DADOS	34
3.2 BASE DE DADOS	35
3.3 TIPOS DE ANÁLISE.....	36
3.3.1 Análise descritiva	37
3.3.2 Análise de sobrevivência	37
3.3.3 Modelo de dependência	39
4 RESULTADOS E DISCUSSÕES	43
4.1 ANÁLISE DESCRITIVA DAS MORTALIDADES SIMULADAS.....	43
4.2 ANÁLISE DE SOBREVIVÊNCIA REFERENTE AO TEMPO ATÉ A MORTE DOS SEGURADOS	44
4.2.1 Análise não paramétrica de sobrevivência	44
4.2.2 Análise paramétrica de sobrevivência	48

4.3 MODELO DE DEPENDÊNCIA.....	51
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	56
REFERÊNCIAS.....	58
APÊNDICE A – CÓDIGOS.....	64

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO E PROBLEMA

Os seguros sobre a vida são produtos atuariais comercializados por seguradoras, entidades de previdência, bancos e outras instituições financeiras. Um conceito fundamental destes produtos é a troca entre o consumo imediato e o consumo futuro do segurado, dado que se paga o prêmio¹, a priori, motivado pela expectativa de recebimento de um ou mais pagamentos futuros condicionados à ocorrência do evento coberto. Isto significa que o preço destes produtos depende do valor do dinheiro no tempo e das probabilidades de sobrevivência ou de morte (FREES; CARRIERE; VALDEZ, 1996).

Tais produtos são chamados de seguros quando o recebimento é único (como é o caso do dote e da indenização) e são chamados de rendas quando o recebimento é periódico (como é o caso da aposentadoria e da pensão), ou seja, ao se referir a uma série de recebimentos (DICKSON; HARDY; WATERS, 2009). Os seguros podem cobrir a sobrevivência, a morte ou ambos os eventos, enquanto as rendas cobrem exclusivamente a sobrevivência do segurado.

O cálculo do preço destes produtos pode ser feito para uma ou mais vidas (pessoas). No caso de um produto individual (para uma pessoa), o cálculo utiliza apenas uma variável aleatória – o tempo futuro de vida do indivíduo segurado. Quando realizado para um grupo de pessoas, o cálculo utiliza o tempo futuro de vida do grupo, isto é, os tempos futuros de vida de todos os integrantes do grupo, conforme a teoria das múltiplas vidas.

Em geral, para o desenvolvimento das formulações e métodos de cálculo das rendas e seguros para grupos, por simplificar os cálculos, supõe-se que os tempos futuros de vida dos indivíduos que compõem o grupo são independentes. No entanto, existem situações em que a hipótese de independência pode não ser razoável (GARCIA; SIMÕES, 2010; SERRANO, 2013).

¹ O prêmio corresponde ao “valor pago pelo segurado para a contratação do seguro, que se efetiva com a emissão da apólice por parte da seguradora” (CANDELARIA; QUINTO, 2017, p. 16).

Por exemplo, Parkes, Benjamin e Fitzgerald (1969) constataram um aumento de 40% na taxa de mortalidade de homens viúvos nos seis primeiros meses de luto, comparada com a taxa de mortalidade esperada para homens casados da mesma idade. No mesmo sentido, Jagger e Sutton (1991) observaram um aumento significativo na taxa relativa de mortalidade nos primeiros seis meses de luto, tanto para os viúvos quanto para as viúvas, quando comparada com não viúvos da mesma idade e sexo.

Dada a possibilidade de inadequação da assunção de independência nos cálculos de seguros e de rendas para grupos, diversas pesquisas elaboraram métodos de obtenção do tempo futuro de vida do grupo desconsiderando a hipótese de independência. Dentre os métodos de obtenção, Lee e Cha (2018) destacam: a) Cópulas (FREES; CARRIERE; VALDEZ, 1996; YOUN; SHEMYAKIN, 1999; YOUN; SHEMYAKIN, 2001; CARRIERE, 2000; LUCIANO; SPREEUW; VIGNA, 2008); b) Modelos de “*Common Shock*” (MARSHAL; OLKIN, 1967; PANJER, 1994; DENUIT; FROSTIG; LEVIKSON, 2006); e c) Modelos multiestados (NORBERG, 1989; WOLTHUIS, 2003; JI; HARDY; LEE, 2011; SPREEUW; WANG, 2008).

Assim, tem-se que, por um lado, assumir a hipótese de independência simplifica os cálculos e reduz os requisitos computacionais. Em contrapartida, a aplicação de algum modelo de dependência pode contribuir para a mitigação do risco biométrico, ou seja, o risco de que a probabilidade de sobrevivência ou de morte utilizada não retrate adequadamente a realidade. Rodrigues (2008) argumenta que a utilização de premissas desconexas da realidade pode levar ao cálculo incorreto dos custos e, conseqüentemente, ao déficit ou ao superávit técnico.

Dado que a imprecisão na estimação das probabilidades de sobrevivência e de morte para grupos pode sub e super precificar os seguros sobre as vidas e assim comprometer a solvência das entidades ou a capacidade de consumo dos segurados, questiona-se: qual o efeito da dependência entre os tempos futuros de vida de indivíduos de um mesmo grupo sobre a precificação de rendas para casais?

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo geral

Analisar o efeito da dependência entre os tempos futuros de vida de indivíduos de um mesmo grupo sobre a precificação de rendas (anuidades) para casais.

1.2.2 Objetivos específicos

Para pessoas de um mesmo grupo, contratantes de rendas (anuidades) para casais, e por meio da observação de seus tempos futuros de vida, objetiva-se:

- Estimar, por meio da análise paramétrica de sobrevivência, a função de sobrevivência dos segurados do sexo masculino e feminino;
- Estimar, por meio de uma função cópula, a estrutura de dependência dos casais;
- Avaliar os efeitos dessa dependência sobre a precificação de rendas (anuidades).

1.3 JUSTIFICATIVA

Os seguros sobre mais de uma vida são comumente calculados considerando a independência entre os tempos futuros de vida dos membros do grupo, no entanto, nem sempre essa hipótese é razoável (GARCIA; SIMÕES, 2010; SERRANO, 2013).

A adoção da independência pode ser benéfica, por tornar os cálculos mais simplificados e reduzir os custos computacionais, uma vez que não é necessária a utilização de modelos estatísticos mais complexos. O princípio da parcimônia estabelece que entre duas hipóteses igualmente válidas para uma mesma afirmação, a mais simples deve ser escolhida. Neste caso, são confrontadas duas hipóteses: a) os tempos restantes de vida são independentes e b) os tempos restantes de vida são dependentes. Se ambas as hipóteses são igualmente possíveis ou se o impacto da adoção de uma em detrimento da outra é irrisório, então, pelo princípio da parcimônia, a independência deve ser adotada (CABRAL FILHO, 2004).

Contudo, como apontado por Gobbi, Kolev e Mulinacci (2019), Henshaw, Constantinescu e Pamen (2020) e Lee e Cha (2018), existem evidências de dependência entre os tempos futuros de vida para alguns grupos específicos, a exemplo de casais e gêmeos, o que impacta as probabilidades de sobrevivência e de morte, bem como os seguros, as anuidades e os prêmios. Isto posto, é evidente a

relevância de ampliar o debate acerca da temática em questão para atestar se as vantagens da independência, de fato, não comprometem os resultados atuariais.

Observada a lacuna existente na literatura nacional acerca da dependência sobre o tempo futuro de vida de grupos, verificou-se a necessidade de: apresentar, em detalhes, uma das metodologias existentes (teoria das cópulas) para estimar os modelos de dependência e calcular rendas (anuidades) para casais; e divulgar trabalhos com outras propostas metodológicas (modelos de “*common shock*” e modelos multiestados) para a realização dessa estimação.

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

O trabalho está estruturado em cinco seções. Na primeira seção, encontra-se a introdução do trabalho, composta pela contextualização, questão de pesquisa, objetivos e justificativa. Na segunda seção, encontram-se as fundamentações teóricas relativas ao cálculo atuarial individual e para múltiplas vidas, além da dependência entre os tempos futuros de vida. Na terceira seção, encontram-se os procedimentos metodológicos adotados. Na quarta seção, encontram-se os resultados e discussões. Por fim, na quinta seção, encontram-se as considerações finais.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A fundamentação teórica apresenta os pilares do cálculo atuarial, as funções biométricas para uma vida e duas vidas (forma geral e para duas vidas independentes), os seguros sobre uma e duas vidas e a dependência entre os tempos futuros de vida.

2.1 O CÁLCULO ATUARIAL DO RAMO VIDA E OS SEUS PRESSUPOSTOS MAIS COMUNS

O cálculo atuarial do ramo vida se dedica ao estudo e ao cálculo dos seguros sobre a vida, isto é, dos produtos previdenciários e seguros de vida. Estes produtos são caracterizados pela aleatoriedade e os seus pagamentos – incluindo os benefícios de aposentadoria, de pensões, pecúlios, dotes e indenizações – estão condicionados à ocorrência de determinado evento biométrico (usualmente sobrevivência, morte ou invalidez) e ao valor do dinheiro no tempo (FREES; CARRIERE; VALDEZ, 1996). Nas aposentadorias, por exemplo, as contribuições podem ser pagas apenas durante o período laboral e os benefícios podem ser recebidos somente após o período laboral. Contudo, a entrada em aposentadoria é incerta, uma vez que o segurado pode falecer durante a fase contributiva; outra variável aleatória é o tempo de pagamento do benefício, uma vez que não é possível determinar o tempo restante de vida do segurado.

Segundo Garcia e Simões (2010), os seguros de vida são contratos de seguros estabelecidos com base no risco de morte do segurado e cuja obrigação da seguradora é o pagamento do benefício (indenização) ao(s) beneficiário(s), caso ocorram os eventos determinados contratualmente. Estes benefícios podem ser pagos de uma só vez, parcelada e temporariamente ou parcelada e vitaliciamente, e o evento que determina o pagamento pode ser a permanência do segurado em um status (sobrevivência, por exemplo) ou a mudança do status do segurado (de vivo para morto ou de válido para inválido, por exemplo).

Quando o pagamento do benefício está condicionado à sobrevivência do segurado, é dito tratar-se de um seguro em caso de vida. Nesta categoria, se o benefício é pago em uma única parcela, denomina-se seguro dotal puro ou seguro de capital diferido; por outro lado, se o benefício é pago em parcelas durante um período,

denomina-se renda ou anuidade. Quando o objeto de cobertura é a morte, isto é, se o pagamento está condicionado à morte do segurado, é dito tratar-se de um seguro em caso de morte. Por fim, se o pagamento pode ocorrer tanto em caso de morte quanto em caso de sobrevivência, é dito tratar-se de um seguro misto (FERREIRA, 1985; GARCIA; SIMÕES, 2010; PIRES *et al.*, 2021).

Desta forma, os cálculos atuariais são realizados considerando as incertezas e partindo do princípio da equivalência atuarial, que determina que, atuarialmente, deve-se manter o equilíbrio intertemporal entre prêmios e benefícios. Como apresentado no exemplo da aposentadoria, há uma diferença entre o momento em que o segurado realiza as contribuições (pagamento dos prêmios) e o momento em que a seguradora paga os benefícios ou indenizações. Por isso, para verificar a equivalência atuarial, estes valores devem ser confrontados em um mesmo período através do Valor Presente Atuarial (VPA), ou seja, descapitalizando-se os valores financeiros e se considerando as probabilidades associadas ao evento biométrico.

Para realizar os cálculos, alguns pressupostos são assumidos, sendo os mais comuns: a taxa de juros (incremento do valor do dinheiro no tempo) é constante, o tempo futuro de vida é aleatório, a sobrevivência ou morte do segurado pode ser bem descrita pela tábua de mortalidade adotada e, ao se tratar de um grupo, geralmente supõe-se que os tempos futuros de vida dos integrantes do grupo são independentes.

2.1.1 O valor do dinheiro no tempo

A matemática financeira apresenta técnicas para modelar a quantificação do dinheiro no tempo. Algumas das principais variáveis envolvidas nesse processo são o valor presente, o valor futuro, o capital inicial (principal), o montante, o prazo, a taxa de juros e a parcela. Pode-se calcular o montante obtido em uma operação financeira com a presença de juros por dois sistemas básicos: a capitalização simples e a capitalização composta. Na capitalização simples, o incremento incide sempre sobre o capital inicial, enquanto na capitalização composta, utilizada na maioria das operações financeiras, o incremento também incide sobre os rendimentos do período anterior (PIRES *et al.*, 2021). O valor futuro de um único pagamento, sob a forma de capitalização composta, é descrito pela equação (1):

$$VF = VP \cdot (1 + i)^n \quad (1)$$

VF é o valor futuro, que neste caso coincide com o montante; VP é o valor presente, que neste caso, coincide com capital inicial; i é a taxa de juros; e n é o prazo.

As capitalizações simples e composta são úteis quando se deseja quantificar quanto vale, hoje, determinado(s) valor(es) originalmente referente(s) a data(s) futura(s), ou seja, quando se deseja encontrar o valor atual de um pagamento – conforme a equação (3) – ou de uma série de pagamentos – conforme a equação (4), se antecipada, ou (5), se postecipada – que será realizada em períodos futuros. Para isso, utiliza-se o fator de desconto financeiro v descrito em (2):

$$v = \frac{1}{(1 + i)} \quad (2)$$

i é a taxa de juros.

$$VA = VF \cdot v^n \quad (3)$$

VA é o valor atual; VF é o valor futuro; n é o período de tempo; e v é o fator de desconto financeiro.

$$VA = \sum_{j=0}^{n-1} v^j \cdot R \quad (4)$$

$$VA = \sum_{j=1}^n v^j \cdot R \quad (5)$$

VA é o valor atual; n é a quantidade de pagamentos; R é o valor de cada pagamento; e v é o fator de desconto financeiro.

2.1.2 Tempo futuro de vida

Sob o pressuposto comumente adotado de que a taxa de juros é constante em todo o período e que o evento biométrico de interesse é a morte, a aleatoriedade do cálculo atuarial é dada pelo acréscimo da variável aleatória “tempo futuro de vida”,

que representa o tempo até a morte do indivíduo. A partir do tempo futuro de vida é possível encontrar as probabilidades e as funções biométricas associadas.

Segundo Garcia e Simões (2010) e Pires *et al.* (2021), se T é a variável aleatória que indica o tempo futuro de vida da pessoa de idade x , com $x \geq 0$, então a probabilidade da pessoa de idade x sobreviver pelo menos t anos é dada pela função de sobrevivência, representada pela equação (6):

$${}_t p_x = S_x(t) = P(X > x + t | X > x) = \frac{S(x + t)}{S(x)} \quad (6)$$

$S_x(t)$ é a função de sobrevivência da variável aleatória T , que representa a probabilidade de uma pessoa de idade x sobreviver até a idade $x + t$, com $t \in (0, \omega - x)$.

Complementarmente, a probabilidade da pessoa de idade x morrer em até t anos é dada pela função de distribuição acumulada, definida pela equação (7):

$${}_t q_x = F_x(t) = 1 - S_x(t) = 1 - \frac{S(x + t)}{S(x)} \quad (7)$$

$F_x(t)$ é a função de distribuição acumulada da variável aleatória T , que representa a probabilidade de uma pessoa de idade x morrer entre as idades x e $x + t$.

Além disso, outra função importante é a probabilidade de uma pessoa de idade x falecer entre as idades $x + t$ e $x + t + 1$ representada por (8):

$${}_t | q_x = {}_t p_x - {}_{t+1} p_x \quad (8)$$

Apresentadas as principais funções biométricas para o cálculo atuarial do ramo vida (${}_t p_x$, ${}_t q_x$ e ${}_t | q_x$), a próxima subseção discorre sobre a matemática atuarial aplicada a uma vida, incluindo outras funções biométricas, o seguro dotal, os seguros contra a morte e as anuidades.

2.2 VIDAS INDIVIDUAIS

Esta subseção trata das principais formulações necessárias para o cálculo de seguros sobre uma só vida, incluindo as funções biométricas (l_x , d_x , q_x e p_x), os seguros dotais, os seguros contra a morte e as anuidades.

2.2.1 Funções biométricas para uma vida

Vilanova (1969) afirma que a tábua de mortalidade é o elemento básico dos seguros cujo objeto é a vida humana. Pires *et al.* (2021, p. 69) define a tábua de mortalidade como “uma tabela que apresenta o comportamento estatístico da mortalidade de uma população, permitindo cálculos de probabilidades e expectativas relacionadas a vida humana”.

As tábuas de mortalidade são constituídas por funções biométricas dispostas por idades (de 0 até a última idade da tábua, denotada por ω), destacando-se o uso de quatro delas neste estudo: l_x , d_x , q_x e p_x , representadas, respectivamente, por (9), (10), (11) e (12):

$$l_x = \begin{cases} l_{x_0}, & \text{se } x = 0 \\ l_{x-1} \cdot p_{x-1}, & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (9)$$

l_x é o número de pessoas vivas à idade exata x ; l_{x_0} é um número positivo arbitrário; l_{x-1} é o número de vivos de pessoas vivas à idade exata $x - 1$; p_{x-1} é a probabilidade de uma pessoa de idade $x - 1$ sobreviver entre as idades $x - 1$ e x .

$$d_x = l_x \cdot q_x \quad (10)$$

d_x é o número de mortos entre as idades x e $x + 1$; q_x é a probabilidade de uma pessoa de idade x morrer entre as idades x e $x + 1$.

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} \quad (11)$$

q_x é a probabilidade de uma pessoa de idade x morrer entre as idades x e $x + 1$.

$$p_x = 1 - q_x \quad (12)$$

p_x é a probabilidade de uma pessoa de idade x sobreviver entre as idades x e $x + 1$.

É simples verificar que as funções biométricas podem ser expressas de várias formas diferentes, de modo que é suficiente a obtenção de apenas uma delas para construir toda a tábua de mortalidade. Por exemplo, a partir de (9) é possível descrever d_x , q_x e p_x unicamente em função de l_x , conforme (13), (14) e (15):

$$l_{x+1} = l_x \cdot p_x \Rightarrow p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \quad (13)$$

$$q_x = 1 - p_x = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} \Rightarrow q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} \quad (14)$$

$$d_x = l_x \cdot q_x = l_x \cdot \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} \Rightarrow d_x = l_x - l_{x+1} \quad (15)$$

Ademais, outras funções biométricas podem ser adicionadas às tábuas de mortalidade conforme a necessidade, como a taxa central de mortalidade, a força de mortalidade (ou taxa instantânea de mortalidade) e a expectativa de vida. Outras informações sobre as funções biométricas e as tábuas de mortalidade podem ser encontradas em Vilanova (1969), Garcia e Simões (2010) e Pires *et al.* (2021).

2.2.2 Seguros individuais sobre a vida

Os seguros podem ser classificados conforme o início da cobertura, o encerramento da cobertura e o comportamento do pagamento.

Quanto ao início da cobertura, são considerados imediatos quando a cobertura se inicia no período corrente e diferidos quando a cobertura se inicia decorridos m anos, isto é, depois de um período de carência.

Quanto ao encerramento da cobertura, são ditos vitalícios quando a cobertura se encerra com a morte do segurado e ditos temporários quando a cobertura se encerra decorridos n anos.

Quanto ao comportamento do pagamento, é denominado a capital constante quando o pagamento (em termos nominais) é fixo e denominado variável quando o

pagamento (em termos nominais) varia com o passar do tempo (GARCIA; SIMÕES, 2010).

As formulações e os conceitos apresentados nesta seção são referentes a seguros sobre a vida para uma pessoa, discretos², com capital constante igual a uma unidade monetária e prêmios pagos de forma única e pura, ou seja, o prêmio é pago integralmente no momento da contratação do seguro e sem a adição de carregamentos de quaisquer tipos.

2.2.2.1 Seguro dotal puro

Também conhecido como seguro de capital diferido, o seguro dotal puro é o valor presente atuarial de um único pagamento a ser realizado ao beneficiário, o dote, caso o contratante de idade x sobreviva até a idade $x + n$. Se ${}_n p_x$ é a probabilidade da pessoa de idade x sobreviver entre as idades x e $x + n$ e v é o fator de desconto financeiro, tem-se que o seu produto define o fator de desconto atuarial, consoante (16):

$${}_n E_x = v^n \cdot {}_n p_x \quad (16)$$

${}_n E_x$ é seguro dotal puro e, também, o fator de desconto atuarial.

Assim, o seguro dotal puro é o seguro pelo qual a seguradora se compromete a indenizar uma única vez o segurado (ou um beneficiário) caso o segurado sobreviva ao tempo acordado. Portanto, não haverá pagamento de indenização caso o segurado faleça antes de completar $x + n$ anos de idade.

2.2.2.2 Seguros em caso de morte

O seguro contra a morte ou seguro por falecimento é o valor presente atuarial de um único pagamento, realizado ao beneficiário, no final do ano de morte do segurado, caso este faleça no período estabelecido em contrato. Esta subseção trata

² O tempo futuro de vida só pode assumir valores inteiros.

de quatro modalidades de seguros em caso de morte, variando-se os períodos de início e de fim de contrato.

Se a cobertura se inicia na data de contratação do seguro e só termina com a morte do segurado, a qualquer tempo, caracteriza-se o seguro contra a morte imediato e vitalício (A_x), também chamado de seguro de vida inteira, que remunera o beneficiário no final do ano de morte do segurado. Neste cenário, a seguradora obrigatoriamente pagará uma indenização, atualizada atuarialmente conforme (17):

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \cdot {}_t|q_x \quad (17)$$

Se a cobertura se inicia na data de contratação do seguro e dura no máximo n anos, caracteriza-se o seguro contra a morte imediato e temporário ($A_{x:\overline{n}|}^1$), que remunera o beneficiário, no final do ano de morte do segurado, caso o segurado faleça entre as idades x e $x + n$. Neste cenário, a seguradora não pagará indenização caso o segurado faleça após a idade $x + n$. A expressão (18) atualiza atuarialmente a respectiva indenização.

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} \cdot {}_t|q_x \quad (18)$$

Se a cobertura se inicia após um período de carência (diferimento), em relação à contratação do seguro, e só termina com a morte do segurado, a qualquer tempo, caracteriza-se o seguro contra a morte diferido e vitalício (${}_m|A_x$), que remunera o beneficiário caso o segurado faleça após a idade $x + m$. Neste caso, a seguradora não pagará indenização caso o segurado faleça durante o período de carência, ou seja, antes de alcançar a idade $x + m$. A equação (19) representa a valor presente atuarial da respectiva indenização.

$${}_m|A_x = \sum_{t=m}^{\infty} v^{t+1} \cdot {}_t|q_x \quad (19)$$

Se a cobertura se inicia após um período de carência (diferimento), em relação à contratação do seguro, e dura no máximo n anos, caracteriza-se o seguro contra a morte diferido e temporário (${}_m|A_{x:\bar{n}}^1$), que remunera o beneficiário caso o segurado faleça entre as idades $x + m$ e $x + m + n$. Neste cenário, a seguradora não pagará indenização caso o segurado faleça durante o período de carência ou após o final da cobertura. O valor presente atuarial desta indenização é dado por (20):

$${}_m|A_{x:\bar{n}}^1 = \sum_{t=m}^{m+n-1} v^{t+1} \cdot {}_t|q_x \quad (20)$$

As formulações das quatro modalidades de seguro contra a morte se diferenciam tanto pelo limite inferior, que indica o tempo em que se inicia a cobertura, quanto pelo limite superior, que indica o tempo em que se encerra a cobertura. Além disso, em três dos quatro seguros contra a morte, não é certo o dispêndio da entidade, pois este só ocorre quando o segurado falece no período de cobertura.

2.2.2.3 Seguros mistos

De acordo com Ferreira (1985), os seguros mistos são aqueles que combinam os seguros em caso de morte com os seguros de sobrevivência. O modelo mais comum é o seguro dotal misto ($A_{x:\bar{n}}$), que representa a associação de um seguro dotal puro com um seguro contra a morte imediato e temporário, tratando-se, portanto, da soma entre (16) e (18), conforme (21):

$$A_{x:\bar{n}} = {}_nE_x + A_{x:\bar{n}}^1 \quad (21)$$

Segundo essa definição, é possível criar outros modelos de seguro misto, com diferimento no seguro contra a morte ou com uma temporariedade que difere entre o dotal puro e o seguro contra a morte, por exemplo.

2.2.2.4 Anuidades

As anuidades atualizam séries de pagamentos cujo início e continuação dependem da sobrevivência do segurado (FERREIRA, 1985). Noutros termos, elas representam o valor presente atuarial de uma série de pagamentos realizados ao segurado, enquanto sobreviver, limitada ao período determinado em contrato.

Além da classificação geral dos seguros, as anuidades também podem ser classificadas como antecipadas, quando os pagamentos ocorrem no início de cada período, ou postecipadas, quando os pagamentos ocorrem no final de cada período; e anuais, quando os pagamentos ocorrem anualmente, ou fracionadas, quando os pagamentos ocorrem em subperíodos do ano. Aqui se retratam apenas as anuidades anuais.

Se a cobertura se inicia na data de contratação e só termina com a morte do segurado, a qualquer tempo, caracteriza-se a anuidade imediata e vitalícia, que pode ser antecipada (\ddot{a}_x) ou postecipada (a_x) e remunera o segurado anualmente enquanto permanecer vivo. No caso antecipado, a seguradora obrigatoriamente desembolsará, e, no caso postecipado, a seguradora não desembolsará caso o segurado faleça antes da idade $x + 1$. O valor esperado de desembolso é dado por (22), em caso de pagamentos antecipados, e (23), caso postecipados.

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^t \cdot {}_t p_x \quad (22)$$

$$a_x = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \cdot {}_t p_x \quad (23)$$

Se a cobertura se inicia na data de contratação e se dura no máximo n anos, caracteriza-se a anuidade imediata e temporária, que pode ser antecipada ($\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$) ou postecipada ($a_{x:\overline{n}|}$) e remunera o segurado anualmente enquanto permanecer vivo, mas no máximo por n anos. No caso antecipado, a seguradora obrigatoriamente desembolsará e, no caso postecipado, a seguradora não desembolsará caso o segurado faleça antes da idade $x + 1$. O valor esperado de desembolso dado é por (24), em caso de pagamentos antecipados, e (25), caso postecipados.

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t \cdot {}_t p_x \quad (24)$$

$$a_{x:\bar{n}|} = \sum_{t=1}^n v^t \cdot {}_t p_x \quad (25)$$

Se a cobertura se inicia após um período de carência (diferimento) e se só termina com a morte do segurado, a qualquer tempo, caracteriza-se a anuidade diferida e vitalícia, que pode ser antecipada (${}_m\ddot{a}_x$) ou postecipada (${}_m a_x$) e remunera o segurado anualmente até o final de sua vida caso sobreviva até a idade $x + m$. Logo, a seguradora não pagará indenização caso o segurado faleça antes de completar $x + m$ anos de idade. Neste caso, o valor esperado de desembolso é dado por (26), em caso de pagamentos antecipados, e (27), caso postecipados.

$${}_m\ddot{a}_x = \sum_{t=m}^{\infty} v^t \cdot {}_t p_x \quad (26)$$

$${}_m a_x = \sum_{t=m+1}^{\infty} v^t \cdot {}_t p_x \quad (27)$$

Se a cobertura se inicia após um período de carência (diferimento) e se dura no máximo n anos, caracteriza-se a anuidade diferida e temporária, que pode ser antecipada (${}_m\ddot{a}_{x:\bar{n}|}$) ou postecipada (${}_m a_{x:\bar{n}|}$) e remunera o segurado anualmente enquanto sobreviver, mas apenas entre as idades $x + m$ e $x + m + n$. Nesta modalidade, a seguradora não pagará indenização caso o segurado faleça antes de completar $x + m$ anos de idade. O valor esperado de desembolso é dado por (28), em caso de pagamentos antecipados, e (29), caso postecipados.

$${}_m\ddot{a}_{x:\bar{n}|} = \sum_{t=m}^{m+n-1} v^t \cdot {}_t p_x \quad (28)$$

$${}_m a_{x:\bar{n}|} = \sum_{t=m+1}^{m+n} v^t \cdot {}_t p_x \quad (29)$$

Assim como nos seguros contra a morte, as formulações das anuidades se diferenciam tanto pelo limite inferior, que indica o tempo em que se inicia a cobertura, quanto pelo limite superior, que indica o tempo em que se encerra a cobertura. Além disso, em seis das oito modalidades de anuidades, não é certo o dispêndio da entidade, pois este só ocorre quando o segurado sobrevive ao período de cobertura.

2.3 TEORIA DAS MÚLTIPLAS VIDAS

O estudo dos seguros sobre a vida de duas ou mais pessoas também é intitulado de teoria das múltiplas vidas. Em geral, devido à falta de estatísticas sobre a sobrevivência de grupos, as probabilidades de grupos são calculadas a partir das probabilidades individuais encontradas nas tábuas de mortalidade, assumindo-se o pressuposto de que os tempos futuros de vida dos indivíduos são independentes (GARCIA; SIMÕES, 2010).

Existem várias combinações possíveis de associação entre as variáveis aleatórias dos tempos futuros de vida, como o modelo vivo-morto (*alive-dead model*), o modelo de morte acidental (*accidental death model*) e o modelo de invalidez permanente (*permanent disability model*) descritos e ilustrados por Dickson, Hardy e Waters (2009, p. 230-234), por exemplo. A essas associações se dá o nome de status. Os dois status proeminentes na literatura atuarial são o status de vida conjunta e o status de último sobrevivente. É dito que um status falha quando ocorre o evento de interesse e que um status sobrevive quando não ocorre o evento de interesse.

Sob o status de vida conjunta, a falha ocorre no momento da primeira morte, isto é, o grupo sobrevive enquanto todos os segurados estiverem vivos. O status de último sobrevivente, por sua vez, falha no momento da morte do último segurado, isto é, o grupo sobrevive enquanto pelo menos um de seus segurados permanecer vivo (GARCIA; SIMÕES, 2010; PIRES *et al.*, 2021).

Nos produtos que cobrem a sobrevivência (seguro dotal puro e anuidades), o(s) pagamento(s) é (são) motivado(s) pela sobrevivência do grupo, assim, a primeira morte (vida conjunta) ou a morte do último segurado (último sobrevivente), caso ocorra antes do final da cobertura, implica no encerramento da cobertura e impossibilita o pagamento do(s) dote(s). Por outro lado, no seguro contra a morte, o pagamento é motivado pela falha do grupo, isto é, pela primeira morte (vida conjunta) ou pela morte

do último segurado (último sobrevivente), que implica no pagamento da indenização em caso de ocorrência durante a cobertura.

Esta subseção trata do caso de um grupo formado por duas pessoas (duas vidas), supondo a independência entre os seus tempos futuros de vida, e os seguros serão calculados considerando as mesmas condições dos seguros individuais. Ressalta-se que os resultados podem ser expandidos para grupos maiores.

2.3.1 Probabilidades para duas vidas

Segundo Pires *et al.* (2021), duas variáveis aleatórias de um mesmo espaço de probabilidades são independentes se a ocorrência de uma não alterar a probabilidade de ocorrência da outra. Seja $T_{x,y}$ a variável aleatória que representa o tempo futuro de vida de um grupo composto por duas pessoas sob o status de vida conjunta, então:

$$T_{x,y} = \min\{T_x, T_y\} \quad (30)$$

T_x é o tempo futuro de vida da pessoa x ; e T_y é o tempo futuro de vida da pessoa y .

Conseqüentemente,

$${}_t p_{x,y} = S_{T_{x,y}}(t) = P(T_{x,y} > t) = P(\min\{T_x, T_y\} > t) \quad (31)$$

$${}_t q_{x,y} = F_{T_{x,y}}(t) = P(T_{x,y} \leq t) = P(\min\{T_x, T_y\} \leq t) \quad (32)$$

Em razão da hipótese de independência, obtém-se:

$${}_t p_{x,y} = {}_t p_x \cdot {}_t p_y \quad (33)$$

$${}_t q_{x,y} = 1 - {}_t p_x \cdot {}_t p_y \quad (34)$$

$${}_t |q_{x,y} = {}_t p_{x,y} - {}_{t+1} p_{x,y} \quad (35)$$

Agora, seja $T_{\overline{x,y}}$ a variável aleatória que representa o tempo futuro de vida de um grupo composto por duas pessoas sob o status último sobrevivente, então:

$$T_{\overline{x,y}} = \max\{T_x, T_y\} \quad (36)$$

T_x é o tempo futuro de vida da pessoa x ; e T_y é o tempo futuro de vida da pessoa y .

De forma análoga ao caso de vida conjunta, verifica-se que:

$${}_t p_{\overline{x,y}} = S_{T_{\overline{x,y}}}(t) = P(T_{\overline{x,y}} > t) = P(\max\{T_x, T_y\} > t) \quad (37)$$

$${}_t q_{\overline{x,y}} = F_{T_{\overline{x,y}}}(t) = P(T_{\overline{x,y}} \leq t) = P(\max\{T_x, T_y\} \leq t) \quad (38)$$

E

$${}_t q_{\overline{x,y}} = {}_t q_x \cdot {}_t q_y \quad (39)$$

$${}_t p_{\overline{x,y}} = 1 - {}_t q_x \cdot {}_t q_y \quad (40)$$

$${}_{t|} q_{\overline{x,y}} = {}_t p_{\overline{x,y}} - {}_{t+1} p_{\overline{x,y}} \quad (41)$$

As equações (31) e (37) representam as probabilidades de sobrevivência e de morte do grupo sob o status de vida conjunta. Já as equações (32) e (38) representam as mesmas probabilidades sob o status do último sobrevivente. Portanto, as probabilidades para vidas conjuntas em (33), (34) e (35) e as probabilidades para último sobrevivente em (39), (40) e (41) apresentam esta forma porque supõem a independência entre as vidas.

2.3.2 Seguros sobre a vida para duas vidas

As equações e interpretações dos seguros sobre a vida de duas pessoas são similares as dos seguros individuais. O Quadro 1 apresenta as notações e equações gerais destes seguros sob o status de vida conjunta. Para obter as fórmulas gerais do status de último sobrevivente, basta substituir o termo " x, y " por " $\overline{x, y}$ ", como visto nas probabilidades.

Quadro 1 - Seguros sobre a vida sob o status vida conjunta

Nome do seguro	Notação	Equação
Seguro dotal puro	${}_nE_{x,y}$	$v^n \cdot {}_tP_{x,y}$
Seguro contra morte imediato e vitalício	$A_{x,y}$	$\sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \cdot {}_t q_{x,y}$
Seguro contra morte imediato e temporário	$A_{x,y:\bar{n}}^1$	$\sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} \cdot {}_t q_{x,y}$
Seguro contra morte diferido e vitalício	${}_m A_{x,y}$	$\sum_{t=m}^{\infty} v^{t+1} \cdot {}_t q_{x,y}$
Seguro contra morte diferido e temporário	${}_m A_{x,y:\bar{n}}^1$	$\sum_{t=m}^{m+n-1} v^{t+1} \cdot {}_t q_{x,y}$
Seguro dotal misto	$A_{x,y:\bar{n}} $	${}_nE_{x,y} + A_{x,y:\bar{n}}^1$
Anuidade antecipada, imediata e vitalícia	$\ddot{a}_{x,y}$	$\sum_{t=0}^{\infty} v^t \cdot {}_tP_{x,y}$
Anuidade postecipada, imediata e vitalícia	$a_{x,y}$	$\sum_{t=1}^{\infty} v^t \cdot {}_tP_{x,y}$
Anuidade antecipada, imediata e temporária	$\ddot{a}_{x,y:\bar{n}} $	$\sum_{t=0}^{n-1} v^t \cdot {}_tP_{x,y}$
Anuidade postecipada, imediata e temporária	$a_{x,y:\bar{n}} $	$\sum_{t=1}^n v^t \cdot {}_tP_{x,y}$
Anuidade antecipada, diferida e vitalícia	${}_m \ddot{a}_{x,y}$	$\sum_{t=m}^{\infty} v^t \cdot {}_tP_{x,y}$
Anuidade postecipada, diferida e vitalícia	${}_m a_{x,y}$	$\sum_{t=m+1}^{\infty} v^t \cdot {}_tP_{x,y}$
Anuidade antecipada, diferida e temporária	${}_m \ddot{a}_{x,y:\bar{n}} $	$\sum_{t=m}^{m+n-1} v^t \cdot {}_tP_{x,y}$
Anuidade postecipada, diferida e temporária	${}_m a_{x,y:\bar{n}} $	$\sum_{t=m+1}^{m+n} v^t \cdot {}_tP_{x,y}$

Fonte: Elaboração própria, a partir de Ferreira (1985) e Pires *et al.* (2021).

Aplicando as probabilidades apresentadas na seção 2.3.1 nas equações do Quadro 1, obtém-se os seguros para duas vidas independentes. De acordo com os objetivos deste trabalho, verifica-se se as anuidades calculadas conforme o Quadro 1 e a seção 2.3.1 diferem daquelas calculadas pelo modelo de dependência

apresentado nas seções seguintes. A próxima subseção trata da razoabilidade da hipótese de dependência e dos seus efeitos sobre os produtos atuariais.

2.4 DEPENDÊNCIA ENTRE OS TEMPOS FUTUROS DE VIDA

Esta subseção apresenta os achados de outros estudos no que concerne à: a) contestação da independência de riscos entre pessoas de um mesmo grupo; b) aplicação do estudo de dependência entre tempos futuros de vida em diversos produtos atuariais.

A prática atuarial clássica de seguro sobre múltiplas vidas atua sob o pressuposto de independência entre os tempos futuros de vida dos segurados, pois tal assunção simplifica os cálculos e diminui os requisitos computacionais. Entretanto, há evidências na literatura atuarial que apontam a existência de dependência entre os tempos futuros de vida de alguns grupos, especialmente cônjuges, além do impacto disso sobre os prêmios desses seguros (GOBBI; KOLEV; MULINACCI, 2019; HENSHAW; CONSTANTINESCU; PAMEN, 2020; LEE; CHA, 2018).

Os estudos sobre dependência em casais indicam três principais causas para a existência de dependência: desastre comum, estilo de vida e síndrome do coração partido. O fator de desastre comum está relacionado a eventos que podem afetar o tempo de vida dos dois de uma só vez, como acidentes de carro; o fator de estilo de vida se baseia na possibilidade de casais compartilharem um estilo de vida semelhante, como a prática de exercícios físicos e o regime alimentar; por último, a síndrome do coração partido se refere ao aumento da probabilidade de morte de uma pessoa depois que o seu cônjuge falece (DUFRESNE *et al.*, 2018; SANDERS; MELENBERG, 2016; SHEMYAKIN; KNIAZEV, 2017).

Parkes, Benjamin e Fitzgerald (1969) estudaram a mortalidade de 4.486 viúvos, acompanhados por até nove anos, com mais de 55 anos de idade e cujas esposas faleceram em 1957. Desses, 213 faleceram nos primeiros seis meses de luto, uma taxa de morte 40% maior que o esperado para homens casados e da mesma idade.

No mesmo sentido, Niemi (1979) buscou compreender o efeito da morte da esposa na mortalidade do homem aposentado por idade. Para isso, utilizou uma amostra composta por 939 homens casados, nascidos em 1899, que se aposentaram por idade em 1964 e que foram observados até 1976. O autor verificou que o falecimento da esposa não possui efeitos no longo prazo, conquanto, corrobora com

o resultado de Parkes, Benjamin e Fitzgerald (1969) sobre o incremento na mortalidade do viúvo nos primeiros seis meses de luto.

Uma revisão de literatura sobre o impacto da perda do cônjuge, incluindo a mortalidade e morbidez, foi realizada por Windholz, Marmar e Horowitz (1985). Em se tratando da mortalidade, os autores sustentam haver uma convergência entre os resultados encontrados quanto ao aumento da mortalidade em homens mais velhos que perderam a esposa. Todavia, até aquele momento, não era certo o aumento da mortalidade em mulheres que perderam o companheiro. Em relação à morbidez, a revisão dos estudos revelou que o falecimento do cônjuge é um evento traumático que pode causar danos, não apenas psicológicos, mas físicos.

Jagger e Sutton (1991) observaram 344 indivíduos e seus cônjuges por sete anos e registraram os tempos de morte. Um modelo de riscos proporcionais foi utilizado para analisar o tempo de sobrevivência do indivíduo com o ajustamento para fatores como saúde física e mental. Assim como nos estudos expostos anteriormente, o modelo melhor ajustado indicou um aumento na mortalidade nos primeiros seis meses após o luto, mas, nesse caso, para ambos os sexos.

Além da dependência entre cônjuges, também existem estudos sobre a dependência entre tempos futuros de vida de gêmeos. Hougaard, Harvald e Holm (1992) estudaram os dados de 8.985 pares de gêmeos do mesmo sexo da Dinamarca, nascidos entre 1881 e 1930, vivos aos 15 anos e acompanhados até 1980. Dentre os principais resultados, encontraram dependência no tempo de vida que supõem ser causada por riscos compartilhados não observáveis.

Ainda sobre a dependência entre gêmeos, Berg e Drepper (2022) estimaram um modelo de fragilidade, a partir dos dados de 9.270 pares de gêmeos nascidos na Dinamarca, entre 1873 e 1930 e observados até janeiro de 2004. Os autores verificaram haver um efeito do luto sobre o tempo futuro de vida, mas que esse efeito é decrescente conforme a idade aumenta. Em termos práticos, uma pessoa com 75 anos cujo irmão gêmeo faleceu aos 70 anos possui expectativa de vida de 6,42 anos; por outro lado, se o irmão permanecer vivo, a expectativa média de vida é 8,09 anos.

Embora exista uma grande variedade de estudos sobre a dependência entre tempos futuros de vida, a maioria está relacionada a casais. A exposição de outros estudos com comentários sobre as abordagens metodológicas pode ser encontrada em Henshaw, Constantinescu e Pamem (2020) e Lee e Cha (2018). Por fim, os estudos de Hougaard, Harvald e Holm (1992) e Berg e Drepper (2022) são

motivadores para que a dependência entre outros grupos de interesse seja melhor analisada.

A partir daqui se apresentam estudos que tratam da dependência entre tempos futuros de vida com aplicações em produtos atuariais.

Frees, Carriere e Valdez (1996) estudaram o uso de modelos de dependência entre as mortalidades para precificar anuidades sob o status de último sobrevivente e para duas vidas. O modelo de distribuições bivariadas por meio da função de cópula de Frank (1979), que supõe distribuição marginal de Gompertz e estima os seus parâmetros via máxima verossimilhança, foi aplicado nos dados de uma seguradora canadense (não identificada) com aproximadamente 15.000 apólices no período de 1988 a 1993. A estimação encontrou forte dependência entre as vidas e consequentes implicações econômicas: quando comparados com modelos que supõem a independência, o valor das anuidades reduziu em aproximadamente 5%.

Dufresne *et al.* (2018), utilizando-se da mesma base de dados da seguradora canadense, desenvolveram uma modelagem bivariada com técnicas paramétricas e semiparamétricas adicionando, em relação ao trabalho de Frees, Carriere e Valdez (1996), dois fatores de dependência: a diferença de idade entre os cônjuges e o sexo do cônjuge mais velho. Além disso, realizaram a modelagem para quatro tipos de cópulas (Gumbel, Frank, Clayton e Joe) e distribuição marginal de Gompertz, estimados separadamente por dois métodos: *inference functions for margins* (IFM) e *Omnibus*. Aplicaram, também, testes de qualidade do ajustamento dos modelos, demonstrando que a introdução dos fatores de dependência citados aprimora os modelos. Para estabelecer a comparação, três modelos foram criados: o modelo A, no qual os tempos futuros de vida são independentes; o modelo B, no qual há dependência, porém, desconsidera os fatores de dependência; e o modelo C, no qual há dependência e os fatores de dependência são considerados. Conforme os resultados, o modelo A avaliou incorretamente as obrigações totais da seguradora, destacando-se a diferença observada quando o produto é uma anuidade reversível. No entanto, ao comparar o modelo B com o modelo C, apesar da considerável diferença nas obrigações individuais, encontrou-se uma diferença irrisória quando se agregaram as obrigações (DUFRESNE *et al.*, 2018).

Gobbi, Kolev e Mulinacci (2019) estudaram, a partir da mesma base de dados dos dois trabalhos citados anteriormente, a precificação de produtos para mais de uma vida pelo Modelo Estendido de Marshall-Olkin (EMO) e cópulas relacionadas. Neste

caso, a cópula (Clayton, Gumbel e Frank) é aplicada para captar a dependência devido a fatores ambientais compartilhados pelo casal e o modelo Clássico de Marshall-Olkin considera a possível ocorrência de um evento fatal que cause a morte de ambos simultaneamente. Os autores constataram que a mortalidade masculina aumenta significativamente com a morte da esposa em comparação com o cenário contrário. Além disso, analisaram o impacto da dependência em uma anuidade contínua imediata e temporária de 5 anos e em um seguro contra a morte contínuo, imediato e vitalício, para os status de vida conjunta e último sobrevivente. Em todos os casos, encontraram aumento no prêmio associado à dependência.

O estudo de Lu (2017) teve como objetivo estimar a dependência na mortalidade entre cônjuges, usando um modelo de mistura de riscos proporcionais, visando identificar o quanto a dependência é causada pela síndrome do coração partido e o quanto é causada por riscos compartilhados não observados. A base de dados, fornecida pela resseguradora Scor, é composta por apólices de anuidades de vida conjunta comercializadas por uma seguradora francesa anônima, totalizando 41.962 casais cujo produto foi contratado entre o final dos anos 1990 e 2013. Dentre os principais resultados, tem-se que a síndrome do coração partido é responsável por uma grande parte da correlação entre os tempos de vida; que há uma maior correlação quando o homem é mais velho que a mulher, ou seja, a dependência é assimétrica; e que existem evidências de dependência positiva para os riscos compartilhados não observados. Também observou que o modelo que supõe a independência nem sempre sub ou superestima a expectativa de vida e os preços – na verdade, é esperado que este modelo subestime o tempo até a primeira morte e superestime o tempo entre as duas mortes. Ainda, comentou que as diferenças encontradas entre o modelo de independência e o modelo de dependência são maiores nas anuidades diferidas quando comparados com as anuidades imediatas.

Apresentadas algumas das evidências na literatura sobre a dependência entre os tempos futuros de vida de casais e gêmeos, bem como sobre o impacto desta dependência nos cálculos atuariais do ramo vida, a próxima seção detalhará os procedimentos metodológicos adotados para alcançar os objetivos deste estudo.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Esta seção apresenta: a) o tipo de pesquisa;; b) o processo de simulação dos dados; c) as variáveis analisadas; d) as análises realizadas. Os procedimentos foram realizados no software estatístico livre R (R CORE TEAM, 2024) por meio dos pacotes *survival* (THERNEAU, 2023), *flexsurv* (JACKSON, 2016), *copula* (HOFERT *et al.*, 2023) e *VineCopula* (NAGLER *et al.*, 2023).

3.1 TIPO DE PESQUISA E SIMULAÇÃO DOS DADOS

Esta é uma pesquisa:

- Quantitativa (apresenta os resultados em forma numérica, a partir das relações entre as variáveis);
- Aplicada (aplica os conhecimentos teóricos para intervenções na realidade);
- Descritiva (descreve o comportamento de determinada população e a relação entre variáveis);
- *Ex-post-facto* (observa variações em uma variável após a ocorrência de determinado evento);
- Longitudinal (acompanha, por meio da simulação das mortes, os mesmos sujeitos ao longo do tempo, para verificar os efeitos relacionados com o desenvolvimento ou com a exposição contínua às variáveis de estudo).

Durante a elaboração deste estudo, foram contatadas seguradoras e entidades de previdência que comercializam produtos que contemplam mais de uma vida. Foram recebidas duas bases de dados, uma proveniente de uma seguradora e outra proveniente de uma entidade de previdência. No entanto, não foi possível utilizar as bases de dados recebidas. A base enviada pela seguradora era constituída de um quantitativo elevado de contratos, porém não dispunha de informação sobre o sexo e a data de nascimento ou a idade dos segurados. A base enviada pela entidade de previdência tinha uma quantidade pequena de contratos e não havia ocorrido nenhum óbito. Devido à falta de informação, a aplicação dos modelos em ambas as bases de

dados foi inviável. Portanto, neste estudo, foi simulada uma base de dados referente a contratos de produtos atuariais para casais.

3.2 BASE DE DADOS

Foi analisada a dependência entre o tempo futuro de vida dos segurados. Para isso, foram simuladas as informações das duas pessoas cobertas em cada apólice, apresentadas no Quadro 2.

Quadro 2 - Informações dos segurados

Variável	Tipo	Descrição
Data de nascimento	Data	Informa a data de nascimento do segurado
Data da morte	Data	Informa a data da morte do segurado, caso tenha ocorrido
Data do início do contrato	Data	Informa a data em que se iniciou o contrato
Sexo	Qualitativa	Informa o sexo do segurado

Fonte: Elaboração própria (2024).

A partir das informações contidas no Quadro 2, foi possível encontrar a idade dos segurados no momento do início do contrato (idade de entrada), na data da morte (caso tenha ocorrido), no final da cobertura (caso o contrato tenha finalizado) e no fim do acompanhamento das observações.

Para o processo de simulação dos contratos, foram inicialmente definidos três parâmetros: o número de contratos (2000), a data de início das observações (01/01/2010) e a data final das observações (31/12/2023). A data de início da vigência de cada contrato foi obtida a partir de uma seleção aleatória e com reposição de datas entre 01/01/2005 e 31/12/2023.

Depois, para simular as idades dos segurados no início da vigência do contrato, optou-se pelo uso da distribuição Gama – por ser capaz de modelar valores de dados contínuos, positivos, assimétricos à direita e maiores que 0 -, comumente usada em estudos de sobrevivência de confiabilidade (COLOSIMO; GIOLO, 2006, p. 79). Para se aproximar das características da base de dados utilizada por Frees, Carriere e

Valdez (1996) e Dufresne *et al.* (2018), os parâmetros de forma (70) e taxa (1,2) da distribuição Gama foram selecionados de modo que esta gerasse uma população masculina com idade mínima no início do contrato entre 30 e 40 anos e idade máxima entre 80 e 90 anos. Já a população feminina foi simulada a partir de uma distribuição “Gama(70;1,2) + Uniforme(-10;10)”, para gerar idades femininas que seguem distribuição Gama e casais cuja diferença etária entre o homem e a mulher é de no máximo 10 anos (para mais ou para menos), a fim de possibilitar a comparação do efeito da dependência entre casais nesses grupos etários.

A idade de morte dos segurados foi simulada com base em três cenários. O Cenário 1 adota as probabilidades de morte da tábua BR-EMS 2021 segregada por sexo, cuja expectativa de vida ao nascer é igual a 78,3 anos para homens e 82,3 anos para mulheres. As tábuas BR-EMS são elaboradas a partir de dados do mercado brasileiro de seguros de pessoas e de planos de previdência complementar aberta. Os Cenários 2 e 3 adotam as probabilidades de morte da tábua IBGE 2015 para ambos os sexos (com expectativa de vida ao nascer igual a 75,5 anos) e segregada por sexo (com expectativa de vida ao nascer igual a 71,9 anos para homens e 79,1 anos para mulheres), respectivamente. Diferentemente da tábua BR-EMS, as tábuas do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) são elaboradas a partir de dados da população brasileira em geral. Desta forma, ao utilizar estas tábuas constituídas com base em populações distintas, foi possível simular três experiências de mortalidade distintas para os segurados.

Por fim, foram ajustados os decimais das idades no início da vigência do contrato e nas idades de morte, de modo que o tempo futuro de vida resulte sempre em valores maiores que 0.

3.3 TIPOS DE ANÁLISE

Esta subseção apresenta as análises realizadas sobre os dados, incluindo a análise de sobrevivência e o modelo de dependência bivariada. Inicialmente, foram estimadas as funções de sobrevivência, de formas paramétrica e não paramétrica, para identificar a estrutura do tempo futuro de vida dos segurados por sexo. Em seguida, o modelo de dependência foi estimado e selecionado com base nas funções de sobrevivência teóricas obtidas na etapa anterior. Finalmente, foram calculadas e comparadas anuidades antecipadas, imediatas e vitalícias para duas vidas,

considerando o status de último sobrevivente, tanto pelo modelo de dependência quanto pelo modelo que desconsidera esta hipótese.

3.3.1 Análise descritiva

Esta análise descreve as informações mais relevantes sobre a mortalidade das tábuas selecionadas, a idade de entrada e a idade de morte dos segurados nos três cenários simulados, com base nas medidas de tendência central e de dispersão. Neste caso, serão aplicadas as seguintes estatísticas: média, mediana, mínimo, máximo e desvio padrão. Outras informações, além das equações, podem ser consultadas em Azevedo (2016).

3.3.2 Análise de sobrevivência

Na análise de sobrevivência, a variável de interesse é o tempo de falha, isto é, o tempo até a ocorrência de determinado evento, neste caso, o tempo até a morte do indivíduo. A principal diferença entre a análise de sobrevivência e outras técnicas de análise reside na aceitação de observações parciais, chamadas de censura. O truncamento é outra característica comum em estudos de sobrevivência, no qual excluem-se determinados indivíduos do estudo (BORGES, 2014; COLOSIMO; GIOLO, 2006).

Neste estudo, os dados foram truncados à esquerda, pois os contratos em que alguma morte ocorreu antes do início das observações foram excluídos da amostra. Em outras palavras, somente fazem parte da base de dados os contratos em que todos os indivíduos estavam vivos no início do período de observação. A censura à direita ocorre pela presença de indivíduos que não faleceram antes do final do período de observação.

Quanto aos procedimentos de censura e truncamento, inicialmente, definem-se algumas variáveis utilizadas: X e Y são as idades de morte dos segurados do sexo masculino e feminino, respectivamente; x e y são as idades no início da observação dos segurados do sexo masculino e feminino, respectivamente; t_{obs} é a data de início das observações; t_0 é a data de início do contrato; t_f é a data de final das observações.

A partir disto, define-se o tempo entre o início do contrato e o início da observação como $a = \max(t_{obs} - t_0, 0)$. Daí, tem-se que a idade de entrada dos segurados é dada por $x + a$ e $y + a$. Se a data do início do contrato é maior que a data de início das observações, então a idade de entrada será exatamente a idade no início do contrato, caso contrário, a idade de entrada será a idade no início das observações.

Agora, se $b = t_f - \max(t_{obs}, t_0)$, então b representa o tempo total de observação do contrato. Sejam ainda $T_1 = X - x - a$ e $T_2 = Y - y - a$ os tempos futuros de vida dos segurados, então $T_j^* = \min(T_j, b)$, com $j = 1, 2$, são os tempos futuros dos segurados no período de observação, ou seja, censurados a direita. Por fim, δ_j é a variável criada para indicar a censura, ou seja, se $T_j > b$, tem-se $\delta_j = 1$; caso contrário, $\delta_j = 0$. Desta forma, obtém-se um banco de dados que consiste em $\{T_{ij}^*, \delta_j\}$, em que i é o indexador de cada contrato observado e j é o indexador do sexo do segurado.

O Quadro 3 descreve algumas funções importantes e inter-relacionadas para os estudos de sobrevivência.

Quadro 3 - Funções para estudos de sobrevivência

Função	Notação	Equação	Descrição
Função de sobrevivência	$S(t)$	$S(t) = P(T \geq t); t \geq 0$	Probabilidade de o indivíduo sobreviver para além do instante t .
Função de densidade de probabilidade	$f(t)$	$f(t) = \lim_{dt \rightarrow 0^+} \frac{P(t \leq T < t + dt)}{dt}$	Probabilidade de morte no instante t .
Função de distribuição acumulada	$F(t)$	$F(t) = 1 - S(t)$	Probabilidade de morte até o instante t .
Função de risco	$h(t)$	$h(t) = \lim_{dt \rightarrow 0^+} \frac{P(t \leq T < t + dt) T \geq t}{dt}$	Taxa instantânea de morte do indivíduo entre t e $t + dt$, dado que sobreviveu até t .
Função de risco acumulada	$H(t)$	$H(t) = \int_0^t h(u) du; t \geq 0$	Risco de ocorrência do evento de interesse até o instante t .

Fonte: Elaboração própria, a partir de Borges (2014).

Além do descrito do Quadro 3, conforme Borges (2014), a função de sobrevivência é monótona, não crescente, contínua e tem duas propriedades: $S(0) = 1$ e $S(+\infty) = 0$. A função de risco, por sua vez, satisfaz duas condições: $h(t) \geq 0$ e

$\int_0^{\infty} h(t)dt = \infty$. Ademais, a função de risco acumulada também é não negativa, monótona e crescente.

A função de sobrevivência será estimada de forma não paramétrica pelo estimador de Kaplan-Meier, que será a base de comparação por ser o estimador de máxima verossimilhança (FREES; CARRIERE; VALDEZ, 1996). Considerando a função de sobrevivência estimada, é fácil encontrar as demais funções a partir das relações apresentadas por Borges (2014) e Colosimo e Giolo (2006). O estimador de Kaplan-Meier é expresso por (42).

$$\hat{S}(t) = \prod_{j:t_j < t} \left(1 - \frac{d_j}{n_j}\right) \quad (42)$$

Em que $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ são os k tempos distintos e ordenados de falha; d_j é o número de falhas em t_j , $j = 1, 2, \dots, k$; e n_j é o número de indivíduos sob risco em t_j .

Para a estimação paramétrica de sobrevivência, foram ajustados três modelos: Gompertz, Weibull e Gama. Em seguida, para verificação da adequabilidade destes modelos, foi aplicado o Teste da Razão de Verossimilhança (TRV), um método objetivo, que compara a verossimilhança do modelo generalizado (Gama Generalizada) com a verossimilhança dos modelos de interesse (Gompertz, Weibull e Gama). Como no caso deste trabalho, esse teste só pode ser aplicado quando as distribuições dos modelos de interesse são um caso particular de um único modelo generalizado (SANTOS JÚNIOR, 2018). Por fim, para selecionar, dentre os adequados, a melhor distribuição teórica para os dados, utilizou-se o Critério de Informação de Akaike (AIC).

3.3.3 Modelo de dependência

Para trabalhar conjuntamente com mais de uma variável aleatória, seja tratando-se de diferentes variáveis para a mesma observação ou a mesma variável para diferentes observações, utiliza-se dos vetores aleatórios. Neste caso, estuda-se o tempo de futuro de vida dos integrantes do casal em que cada indivíduo é associado a uma variável aleatória, gerando um vetor aleatório bivariado (MAGALHÃES, 2011; PIRES *et al.*, 2021).

Os vetores aleatórios podem ter suas probabilidades calculadas usando três abordagens diferentes: o modelo de distribuição conjunta, que examina como todas as variáveis aleatórias se comportam simultaneamente; o modelo de distribuição marginal, que examina o comportamento individual de cada variável aleatória; e o modelo de distribuição condicional, que examina o comportamento de uma variável dada a ocorrência das demais (MAGALHÃES, 2011; PIRES *et al.*, 2021).

As distribuições bivariadas serão descritas a partir de uma função cópula. De acordo com Nelsen (2006, p. 1, tradução nossa), “Cópulas são funções que conectam ou ‘acoplam’ funções de distribuição multivariadas com as funções de distribuição marginais unidimensionais”.

O matemático Abe Sklar, em 1959, cunhou pela primeira vez o termo “cópula” e publicou seu importante teorema. O teorema de Sklar é um dos principais fundamentos da teoria das cópulas e é a base de muitas aplicações estatísticas para as cópulas. Segundo o teorema, seja H a função de distribuição conjunta com margens F_1 e F_2 , então existe uma cópula C tal que, para todo x e y reais:

$$H(x, y) = C(F_1(x), F_2(y)) \quad (43)$$

Se F_1 e F_2 são contínuas, então C é única; caso contrário, C é unicamente determinada por F_1 e F_2 . Reciprocamente, se C é uma cópula e F_1 e F_2 são funções de distribuição, então a função H é uma função de distribuição conjunta com margens F_1 e F_2 (NELSEN, 2006).

O teorema de Sklar é um pilar da teoria das cópulas e é relevante para a probabilidade e estatística por dois motivos:

Por um lado, permite decompor a função de distribuição de um vetor aleatório real em termos das suas funções de distribuição marginais e de uma função cópula, que incorpora a estrutura de dependência das margens do vetor; esta decomposição viabiliza o estudo de tal função separadamente do estudo das marginais, além de permitir descrever e investigar a dependência que lhes está subjacente.

Por outro lado, fornece um método flexível e eficaz para construir modelos bidimensionais, na medida em que não restringe a escolha das distribuições marginais nem da função cópula que as relaciona (ABDON FILHO, 2019, p. 15).

Neste trabalho é definido um vetor aleatório bivariado (X, Y) para as idades no momento da morte com função de distribuição conjunta $H(x, y) = Prob(X \leq x, Y \leq y)$;

e sejam $F_1(x) = H(x, \infty)$ e $F_2(y) = H(\infty, y)$. As funções de distribuição bivariadas são descritas na forma da equação (44), em que C é a função cópula.

Existe uma grande variedade de métodos (ou famílias) para construir as funções cópulas, como, por exemplo, a cópula normal, Fréchet-Hoeffding, trivial, t, arquimediana e elíptica (ABDON FILHO, 2019; NELSEN, 2006). Este trabalho obtém uma função cópula da família arquimediana, selecionada entre as cópulas de Clayton, Frank, Gumbel e Joe. As cópulas arquimedianas são funções cópula que podem ser descritas como (44):

$$C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)) \quad (44)$$

Em que φ é a função geradora da cópula, pertencente ao conjunto de funções contínuas, estritamente decrescentes e convexas; u e v são os valores das distribuições marginais $F_1(x)$ e $F_2(y)$, respectivamente.

Em particular, as cópulas arquimedianas selecionadas são convenientes, pois possuem apenas o parâmetro θ , que captura a dependência entre X e Y , e são obtidas pelas funções geradoras descritas no Quadro 4.

Quadro 4 - Cópulas Arquimedianas

Nome	Função Geradora	Cópula	Parâmetro
Clayton	$\frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$	$[\max(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1, 0)]^{-\frac{1}{\theta}}$	$\theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$
Frank	$-\ln\left(\frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}\right)$	$-\frac{1}{\theta} \ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)}\right)$	$\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Gumbel	$(-\ln t)^\theta$	$\exp\left(-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{\frac{1}{\theta}}\right)$	$\theta \in [1, \infty)$
Joe	$-\ln(1 - (1 - t)^\theta)$	$1 - [(1 - u)^\theta + (1 - v)^\theta - (1 - u)^\theta(1 - v)^\theta]^{\frac{1}{\theta}}$	$\theta \in [1, \infty)$

Fonte: Elaboração própria, a partir de Nelsen (2006).

O modelo foi estimado pelo método da Máxima Verossimilhança e selecionado com base no AIC.

Para verificar os efeitos da dependência, calcularam-se as anuidades antecipadas, imediatas e vitalícias para o status de último sobrevivente. Essas características foram escolhidas por apresentarem um maior tempo futuro de vida, isto

é, um maior valor da anuidade. Ademais, há relação entre os dois status citados (vida conjunta e último sobrevivente), de modo que, para duas vidas, a partir de um, é possível calcular o outro, conforme demonstrado por Pires *et al.* (2021, p. 244, 247 e 251).

Os cálculos foram feitos tanto sob a hipótese usual de independência, utilizada como base de comparação, quanto utilizando as estimações apresentadas para a hipótese de dependência. Dessa forma, pode-se confirmar se de fato há diferença significativa entre os cálculos, qual o sentido da diferença e qual a dimensão da mesma.

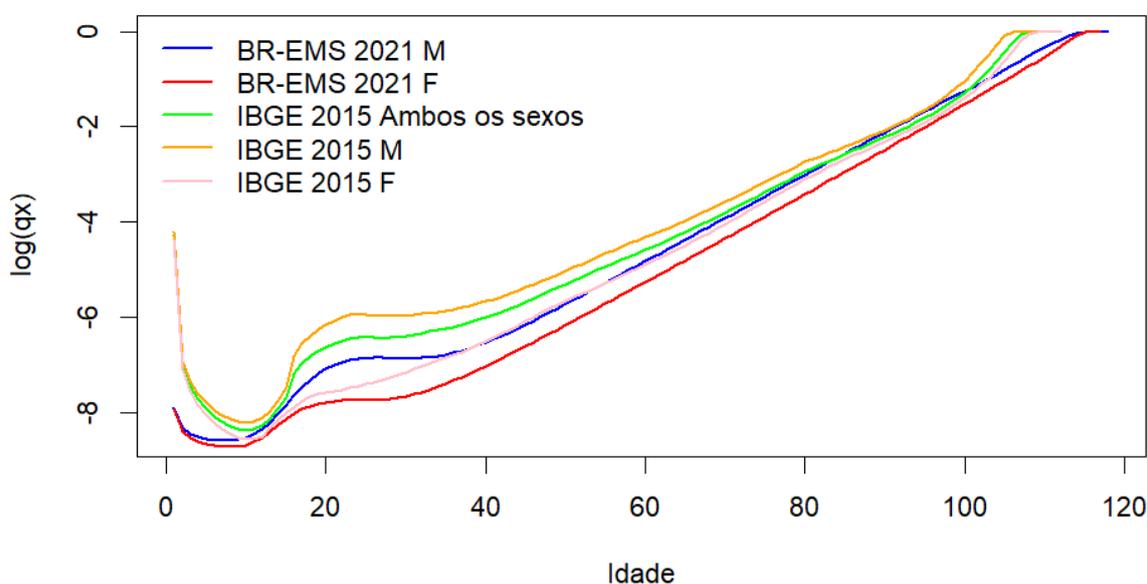
4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Esta seção apresenta os resultados das análises descritas na metodologia. Os resultados são apresentados para cada um dos três cenários citados na seção anterior. O 1º cenário se refere à experiência de mortalidade oriunda da tábua BR-EMS 2021 segregada por sexo, o 2º cenário se refere à experiência de mortalidade decorrente da tábua IBGE 2015 ambos os sexos e o 3º cenário se refere à experiência de mortalidade proveniente da tábua IBGE 2015 segregada por sexo.

4.1 ANÁLISE DESCRITIVA DAS MORTALIDADES SIMULADAS

Aqui, foram analisados os 2000 contratos simulados em cada um dos cenários estabelecidos. As probabilidades de morte das tábuas caracterizam os cenários e podem ser visualizadas na Figura 1.

Figura 1 - Logaritmo da mortalidade por tábua



Fonte: Elaboração própria (2024).

As tábuas cujas curvas de mortalidade estão mais abaixo são aquelas com menor mortalidade e, portanto, as que possuem maiores expectativas de vida. De acordo com a Figura 1, a tábua com menor mortalidade é a BR-EMS 2021 feminina, seguida pela BR-EMS 2021 masculina. Por outro lado, a tábua IBGE 2015 masculina apresenta as maiores probabilidades de morte. Portanto, espera-se que o Cenário 1

apresente o menor número de mortes e que o Cenário 3 apresente o maior número de mortes.

As estatísticas descritivas dos segurados antes do tratamento dos dados (truncamento e censura) são visualizadas na Tabela 1.

Tabela 1 - Estatísticas descritivas dos segurados

Variável	Quantidade	Média	Desvio Padrão	Mediana	Mínimo	Máximo
Idade Masc.	2000	58,19	7,04	57,75	35,88	87,01
Idade Fem.	2000	58,06	8,94	58,02	30,08	94,72
Idade Morte Masc. (1º cen.)	236	70,53	8,07	70,46	48,20	90,50
Idade Morte Fem. (1º cen.)	179	73,24	9,24	73,79	48,64	103,80
Idade Morte Masc. (2º cen.)	305	69,21	7,88	70,21	49,20	95,13
Idade Morte Fem. (2º cen.)	293	70,77	9,44	71,46	43,80	97,29
Idade Morte Masc. (3º cen.)	336	69,12	8,44	69,29	46,80	97,64
Idade Morte Fem. (3º cen.)	269	72,12	8,65	72,70	44,27	96,53

Fonte: Elaboração própria (2024).

Somando-se as quantidades de idades de morte de homens e mulheres dispostas na Tabela 1, é possível identificar que houve: 415 mortes (236+179) e consequentemente 3585 (4000-415) sobrevivências no Cenário 1; 598 mortes (305+293) e 3402 (4000-598) sobrevivências no Cenário 2; 605 mortes (336+269) e 3395 (4000-605) sobrevivências no Cenário 3. Assim, observou-se que o maior e o menor número de mortes ocorrem, respectivamente, nos 3º e 1º cenários, como era de se esperar, de acordo com a análise das probabilidades de morte. Além disso, observa-se que, em todos os cenários, a média da idade de morte está próxima dos 70 anos, mas há distinções em pelo menos uma das estatísticas, o que, juntamente com a variação na quantidade de mortes, indica três experiências de mortalidade diferentes, conforme desejado na simulação.

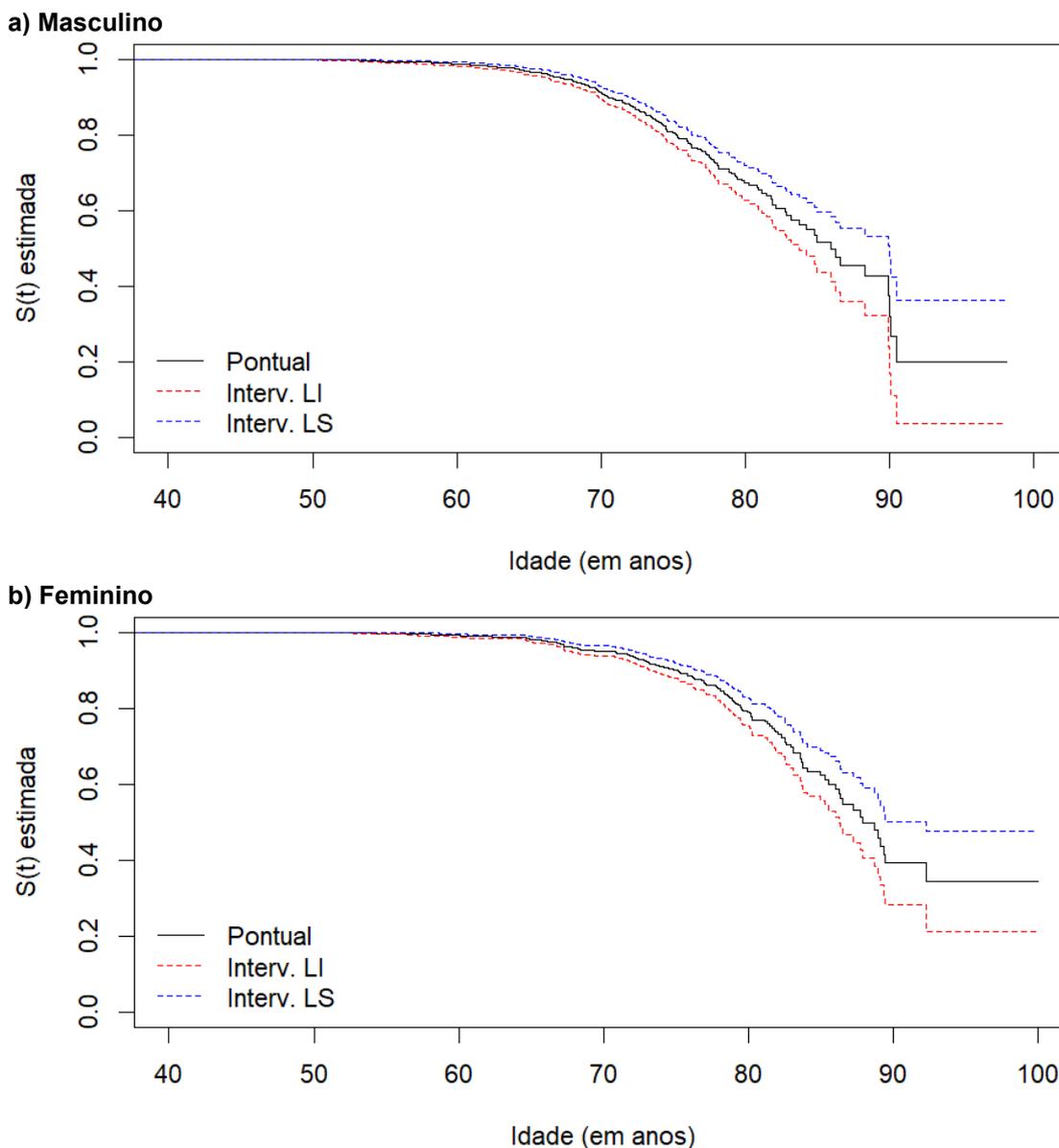
4.2 ANÁLISE DE SOBREVIVÊNCIA REFERENTE AO TEMPO ATÉ A MORTE DOS SEGURADOS

4.2.1 Análise não paramétrica de sobrevivência

Esta subseção apresenta os valores estimados da função de sobrevivência, referentes ao evento “tempo residual de vida” de homens e mulheres, obtidos pelo estimador de Kaplan-Meier. Desta forma, a Figura 2 exibe as curvas de sobrevivência estimadas para o Cenário 1. Na Figura 2.a), que retrata o caso dos segurados do sexo

masculino, a probabilidade de que um segurado sobreviva até a idade 70 é de aproximadamente 90%; e que sobreviva até a idade 90 é de aproximadamente 25%. Para as seguradas do sexo feminino, as probabilidades são de aproximadamente 95% e 40%, respectivamente.

Figura 2 - Funções de sobrevivência obtidas pelo estimador de Kaplan-Meier para o tempo residual de vida de homens e mulheres no Cenário 1



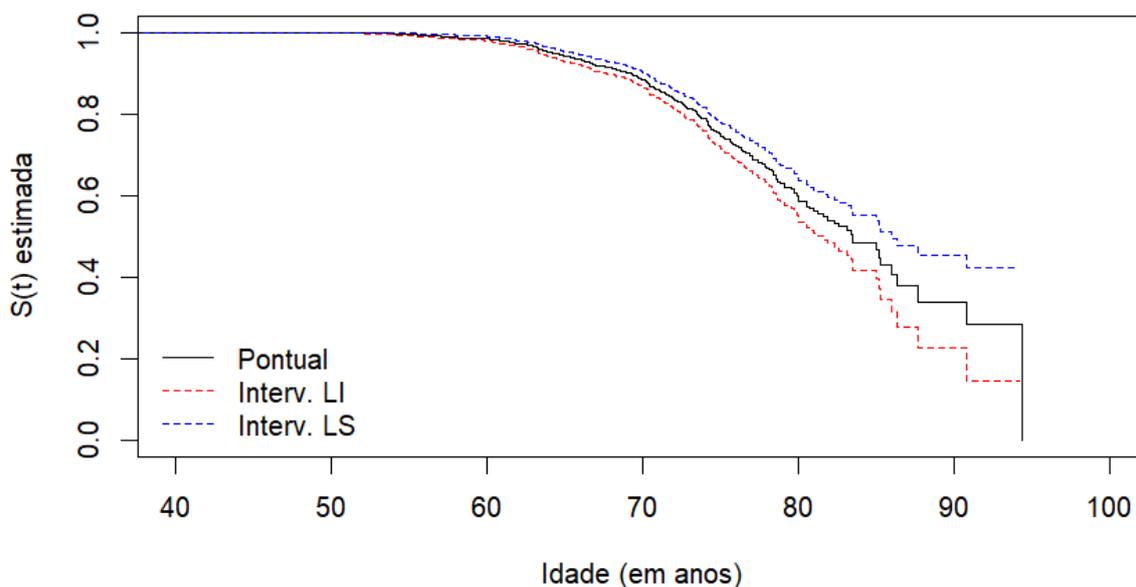
Fonte: Elaboração própria (2024).

Para o Cenário 2, a Figura 3.a) apresenta as probabilidades de sobreviver até os 90 anos em torno de 30% e, assim como na Figura 2.a), a de sobreviver até os 70 anos próxima de 90%. As mulheres neste Cenário 2 apresentaram probabilidades de

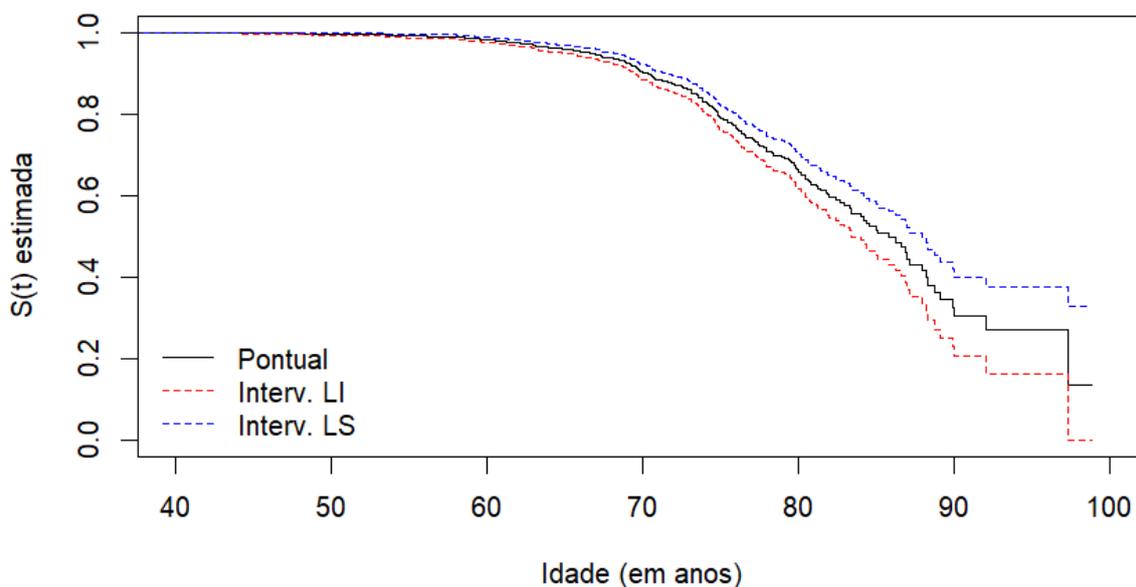
sobrevivência menores, nas duas idades, que as do Cenário 1, com aproximadamente 90% até 70 anos e 30% até 90 anos.

Figura 3 - Funções de sobrevivência obtidas pelo estimador de Kaplan-Meier para o tempo residual de vida de homens e mulheres no Cenário 2

a) Masculino



b) Feminino



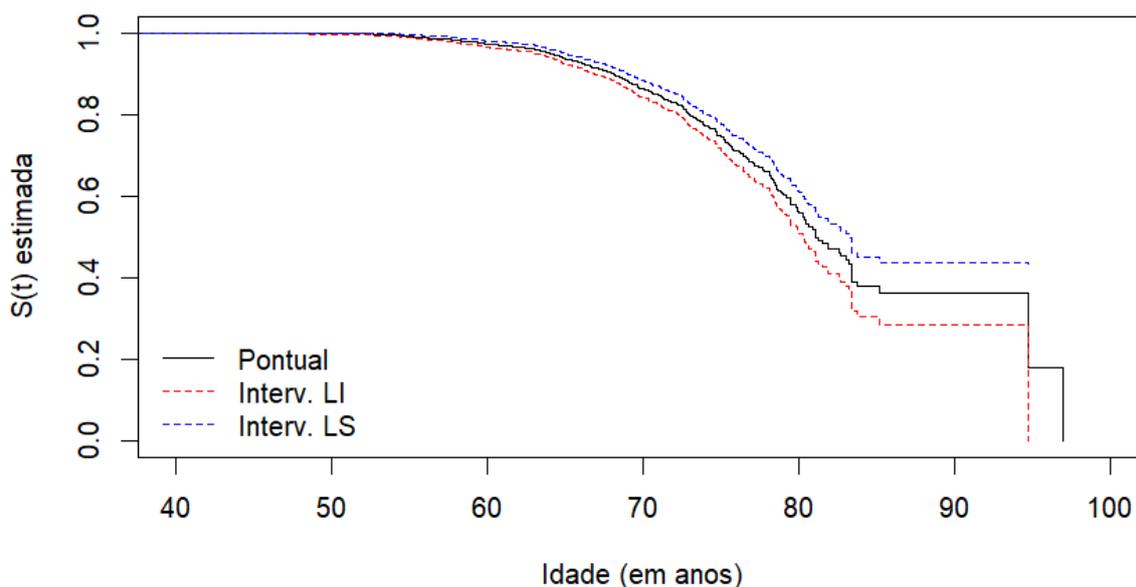
Fonte: Elaboração própria (2024).

A Figura 4, que trata da visualização das probabilidades de sobrevivência estimadas para o Cenário 3, é a menor para o sexo masculino aos 70 anos, com

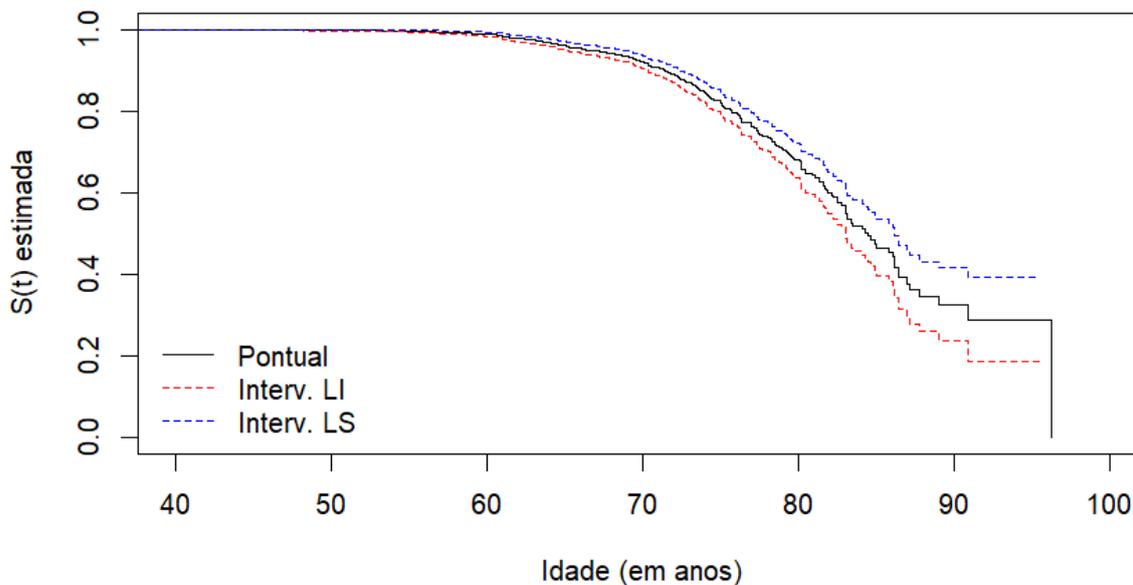
probabilidade em torno de 85%, e a maior aos 90 anos, com aproximadamente 35%. O caso do sexo feminino é similar ao cenário anterior, porém com 2 pontos percentuais a mais em cada idade (92% até os 70 anos e 32% até os 90).

Figura 4 - Funções de sobrevivência obtidas pelo estimador de Kaplan-Meier para o tempo residual de vida de homens e mulheres no Cenário 3

a) Masculino



b) Feminino



Fonte: Elaboração própria (2024).

Em resumo, nota-se um comportamento similar entre a forma das curvas de sobrevivência, variando principalmente nas idades mais avançadas, em que há menos

informação, e em relação aos valores em si, que seguem o esperado conforme as curvas de mortalidade apresentadas na Figura 1.

4.2.2 Análise paramétrica de sobrevivência

Conforme descrito na subseção 3.3.2, a análise paramétrica de sobrevivência estimou as funções de sobrevivência, para o tempo residual de vida dos segurados, por três distribuições: Gompertz, Weibull e Gama. Para verificar a adequabilidade e realizar a seleção dos modelos, foram utilizados o Teste da Razão de Verossimilhança (TRV) e o Critério de Informação de Akaike (AIC), nesta ordem.

As tabelas subsequentes apresentam os parâmetros encontrados para cada distribuição, os resultados do TRV e os p-valores correspondentes, além do AIC para cada cenário e por sexo. Ressalta-se que a hipótese nula do TRV é a de que o modelo de interesse é adequado, isto é, se o p-valor for menor que 5%, essa hipótese é rejeitada.

Tabela 2 - Resultados dos ajustes paramétricos para o tempo residual de vida de homens, segundo o Cenário 1

Distribuição	Parâmetros			TRV	p-valor	AIC
	Escala	Forma	Taxa			
Gompertz	–	0,0773	0,0000	-10,67	1,0000	2.238
Weibull.	10.051	1,1946	–	0,85	0,3565	2.250
Gama	–	1,2125	0,0001	2,10	0,1475	2.251

Fonte: Elaboração própria (2024).

Com base nas informações apresentadas na Tabela 2, as três distribuições foram consideradas adequadas para descrever o comportamento do tempo futuro de vida dos segurados do sexo masculino, considerando a mortalidade da tábua BR-EMS 2021 masculina, uma vez que o p-valor foi superior a 5% nos três casos. A escolha do modelo, portanto, foi feita com base na distribuição que apresentou menor AIC, ou seja, Gompertz.

Tabela 3 - Resultados dos ajustes paramétricos para o tempo residual de vida de mulheres, segundo o Cenário 1

Distribuição	Parâmetros			TRV	p-valor	AIC
	Escala	Forma	Taxa			
Gompertz	–	0,0959	0,0000	-8,99	1,0000	1.725
Weibull.	10.092	1,3064	–	0,005	0,9428	1.734
Gama	–	1,3637	0,0001	0,46	0,4969	1.735

Fonte: Elaboração própria (2024).

Na Tabela 3 são apresentadas as informações referentes aos segurados do sexo feminino utilizando as probabilidades de morte da tábua BR-EMS 2021 feminina. Assim como no caso anterior, as três distribuições foram consideradas adequadas para descrever o comportamento do tempo futuro de vida e, de acordo com o AIC, optou-se por utilizar o modelo de Gompertz.

Tabela 4 - Resultados dos ajustes paramétricos para o tempo residual de vida de homens, segundo o Cenário 2

Distribuição	Parâmetros			TRV	p-valor	AIC
	Escala	Forma	Taxa			
Gompertz	–	0,1025	0,0001	-3,72	1,0000	2.731
Weibull.	1.155	1,4175	–	0,30	0,5834	2.735
Gama	–	1,5112	0,0012	2,12	0,1450	2.737

Fonte: Elaboração própria (2024).

Analisando os dados da Tabela 4, com base na perspectiva da tábua IBGE 2015 para ambos os sexos, verificou-se que o tempo futuro de vida dos segurados homens pode ser bem descrito pelas três distribuições, conforme o resultado do TRV. Mais uma vez, a distribuição Gompertz foi escolhida por resultar no menor AIC.

Tabela 5 - Resultados dos ajustes paramétricos para o tempo residual de vida de mulheres, segundo o Cenário 2

Distribuição	Parâmetros			TRV	p-valor	AIC
	Escala	Forma	Taxa			
Gompertz	–	0,1164	0,0001	-16,01	1,0000	2.586
Weibull.	1.002	1,4024	–	2,32	0,1279	2.604
Gama	–	1,4672	0,0012	5,84	0,0157	2.607

Fonte: Elaboração própria (2024).

Ao analisar a Tabela 5, com base na mesma mortalidade da Tabela 4, a distribuição Gama não se mostrou adequada para caracterizar as seguradas mulheres. Isto posto, ao se comparar o AIC da distribuição Gompertz com a Weibull, optou-se pela Gompertz.

Tabela 6 - Resultados dos ajustes paramétricos para o tempo residual de vida de homens, segundo o Cenário 3

Distribuição	Parâmetros			TRV	p-valor	AIC
	Escala	Forma	Taxa			
Gompertz	–	0,1165	0,0001	-12,26	1,0000	2.972
Weibull.	619,69	1,4321	–	4,09	0,0432	2.988
Gama	–	1,5028	0,0020	9,66	0,0019	2.994

Fonte: Elaboração própria (2024).

Em contraste com os casos anteriores, no Cenário 3, pela mortalidade da tábua IBGE 2015 homens, apenas a distribuição Gompertz não foi rejeitada pelo TRV. Assim, este é o modelo selecionado para este caso, conforme observado na Tabela 6.

Tabela 7 - Resultados dos ajustes paramétricos para o tempo residual de vida de mulheres, segundo o Cenário 3

Distribuição	Parâmetros			TRV	p-valor	AIC
	Escala	Forma	Taxa			
Gompertz	–	0,1089	0,0000	-6,65	1,0000	2.439
Weibull.	2.114	1,4104	–	-0,03	1,0000	2.446
Gama	–	1,5324	0,0006	1,47	0,2248	2.447

Fonte: Elaboração própria (2024).

Conforme evidenciado na Tabela 7, o padrão dos cenários anteriores foi mantido, com a distribuição de Gompertz sendo selecionada, por ser adequada aos dados (conforme atestado pelo TRV) e apresenta o menor AIC. Para resumir esta análise, o Quadro 5 apresenta uma síntese dos resultados dessa subseção.

Quadro 5 - Resumo dos resultados da análise paramétrica de sobrevivência

Cenário	Sexo	Tábua	Distribuição (forma; taxa)
Cenário 1	Masculino	BR-EMS 2021 Masculina	Gompertz (0,0773; 0,0000)
Cenário 1	Feminino	BR-EMS 2021 Feminina	Gompertz (0,0959; 0,0000)
Cenário 2	Masculino	IBGE 2015 Ambos os sexos	Gompertz (0,1025; 0,0001)
Cenário 2	Feminino	IBGE 2015 Ambos os sexos	Gompertz (0,1164; 0,0001)
Cenário 3	Masculino	IBGE 2015 Homens	Gompertz (0,1165; 0,0001)
Cenário 3	Feminino	IBGE 2015 Mulheres	Gompertz (0,1089; 0,0000)

Fonte: Elaboração própria (2024).

Como pode ser observado no Quadro 5, a distribuição de Gompertz foi selecionada em todas as conjunturas (cenários e sexos). Esta distribuição já foi empregada em diversos estudos sobre a dependência entre tempos futuros de vida,

como em Frees, Carriere e Valdez (1996) e Dufresne *et al.* (2018), bem como em outros estudos de sobrevivência.

4.3 MODELO DE DEPENDÊNCIA

Conforme mencionado na subseção 3.3.3, os modelos bivariados de dependência apresentados nesta subseção são construídos utilizando uma função cópula. Esta função é determinada através das distribuições marginais univariadas definidas pela análise paramétrica de sobrevivência na subseção anterior, tanto para cada cenário quanto para os segurados de cada sexo.

A partir dos dados empíricos sobre o tempo futuro de vida dos segurados, foram obtidas as pseudo-observações empíricas (ou seja, transformadas em uma distribuição uniforme com intervalo de 0 a 1). Em seguida, seleciona-se a cópula – Clayton, Frank, Gumbel ou Joe – com base no AIC. Finalmente, o modelo bivariado foi construído com base na função cópula selecionada, no parâmetro da função cópula, nas distribuições marginais univariadas e nos parâmetros das distribuições marginais univariadas. A Tabela 8 apresenta a função cópula selecionada para cada cenário.

Tabela 8 - Resultado da seleção dos modelos de dependência

Cenário	Cópula	Parâmetro θ
Cenário 1	Gumbel	4,7029
Cenário 2	Clayton	3,9397
Cenário 3	Clayton	3,999

Fonte: Elaboração própria (2024).

De acordo com a Tabela 8, observa-se que, mesmo considerando a mesma distribuição marginal univariada em todos os cenários e para ambos os sexos, foram obtidas cópulas diferentes por cenário. No Cenário 1, a cópula de Gumbel com parâmetro 4,7029 foi selecionada. Enquanto nos Cenários 2 e 3, a cópula de Clayton foi selecionada, com parâmetros muito próximos, 3,9397 e 3,999, respectivamente.

A partir dos modelos bivariados construídos para cada cenário, foi possível calcular: 1) as anuidades antecipadas, imediatas e vitalícias sob o status de último sobrevivente, considerando a hipótese de dependência; 2) as mesmas anuidades considerando a hipótese de independência, usualmente aplicada nos cálculos

atuariais; 3) a razão entre as anuidades sob a hipótese de dependência e as anuidades sob a hipótese de independência.

As anuidades mencionadas foram calculadas considerando as idades 40, 50, 60, 70 e 80, para os segurados do sexo masculino e para as seguradas do sexo feminino, com distâncias de -10, -5, 0, 5 e 10 em relação à idade do homem, gerando um total de 25 pares de idades. Por exemplo, se a idade do homem for 40 anos, as idades calculadas para a mulher seriam 30, 35, 40, 45, 50 anos. A taxa de juros utilizada foi de 5% a.a.. A Tabela 9 apresenta os resultados dos cálculos descritos anteriormente para o Cenário 1.

Tabela 9 - Anuidades antecipadas, imediatas e vitalícias sob o status de último sobrevivente no Cenário 1

Idade da mulher	Idade do homem (x)				
	40 anos	50 anos	60 anos	70 anos	80 anos
Sob a hipótese de dependência					
(x) – 10	19,9022	19,2271	18,1555	16,4879	13,9840
(x) – 5	19,7521	18,9895	17,7876	15,9408	13,2309
(x)	19,6499	18,8319	17,5545	15,6219	12,8568
(x) + 5	19,5547	18,6870	17,3444	15,3397	12,5151
(x) + 10	19,4533	18,5327	17,1178	15,0187	12,0620
Sob a hipótese de independência					
(x) – 10	20,2629	19,7995	19,0454	17,8213	15,8504
(x) – 5	20,1750	19,6564	18,8128	17,4455	15,2551
(x)	20,0840	19,5084	18,5726	17,0593	14,6524
(x) + 5	19,9680	19,3196	18,2666	16,5687	13,8939
(x) + 10	19,8283	19,0926	17,8991	15,9825	13,0000
Razão entre a hipótese de dependência e de independência					
(x) – 10	0,9822	0,9711	0,9533	0,9252	0,8822
(x) – 5	0,9790	0,9661	0,9455	0,9137	0,8673
(x)	0,9784	0,9653	0,9452	0,9157	0,8775
(x) + 5	0,9793	0,9673	0,9495	0,9258	0,9008
(x) + 10	0,9811	0,9707	0,9563	0,9397	0,9278

Fonte: Elaboração própria (2024).

Como observado na Tabela 9, a razão entre as anuidades resultou em valores menores que 1, o que implica que os resultados pela dependência geraram valores menores quando comparados com os gerados pela independência. Além disso, nota-se que esta razão diminui conforme as idades aumentam, ou seja, quanto mais velho o casal, maior a diferença entre os cálculos pelas metodologias distintas. Para o primeiro grupo de idades, a diferença está em torno de 2 a 3%, enquanto no último, chega a mais de 13%. Os resultados deste cenário estão de acordo com o estudo de Lu (2018) que observou diferença maior entre os modelos em anuidades diferidas –

cujos tempos futuros de vida são considerados após um período de carência, isto é, em idades mais avançadas –, quando comparadas com as anuidades imediatas.

A Tabela 10 apresenta as anuidades para o Cenário 2.

Tabela 10 - Anuidades antecipadas, imediatas e vitalícias sob o status de último sobrevivente no Cenário 2

Idade da mulher	Idade do homem (x)				
	40 anos	50 anos	60 anos	70 anos	80 anos
Sob a hipótese de dependência					
(x) – 10	15,3477	12,2385	8,0760	3,5926	0,5856
(x) – 5	14,6678	11,3434	7,0944	2,8391	0,3714
(x)	14,4480	11,0701	6,8031	2,6289	0,3456
(x) + 5	14,4076	11,0175	6,7433	2,5918	0,3449
(x) + 10	14,4013	11,0088	6,7334	2,5884	0,3449
Sob a hipótese de independência					
(x) – 10	16,7265	14,0680	9,9451	4,5580	0,6501
(x) – 5	16,1849	13,2082	8,7105	3,3893	0,3815
(x)	15,7029	12,4614	7,7497	2,7929	0,3460
(x) + 5	15,2973	11,8635	7,1284	2,6122	0,3449
(x) + 10	14,9734	11,4328	6,8300	2,5890	0,3449
Razão entre a hipótese de dependência e de independência					
(x) – 10	0,9176	0,8700	0,8121	0,7882	0,9009
(x) – 5	0,9063	0,8588	0,8145	0,8376	0,9735
(x)	0,9201	0,8884	0,8779	0,9413	0,9990
(x) + 5	0,9418	0,9287	0,9460	0,9922	1,0000
(x) + 10	0,9618	0,9629	0,9859	0,9998	1,0000

Fonte: Elaboração própria (2024).

Para o Cenário 2, conforme observado na Tabela 10, é possível notar que as maiores razões entre as hipóteses são encontradas quando a mulher tem pelo menos a mesma idade que o homem. Por exemplo, no grupo em que o homem tem 70 anos, quando a mulher tem 60 anos, a razão é de 0,7882, e quando a mulher tem 80 anos, a razão é de 0,9998. Ademais, neste caso, não houve tendência de diminuição da razão causada pelo aumento das idades. Contrariamente ao observado no Cenário 1, as maiores razões estão na última faixa de idades.

A Tabela 11 apresenta as anuidades para o Cenário 3.

Tabela 11 - Anuidades antecipadas, imediatas e vitalícias sob o status de último sobrevivente no Cenário 3

(Continua)

Idade da mulher	Idade do homem (x)				
	40 anos	50 anos	60 anos	70 anos	80 anos
Sob a hipótese de dependência					
(x) – 10	17,8156	15,9350	13,1137	9,2090	4,6705
(x) – 5	16,9763	14,6573	11,2911	6,9471	2,6372
(x)	15,9354	13,1145	9,2100	4,6710	1,1349
(x) + 5	14,6618	11,2978	6,9554	2,6403	0,3162
(x) + 10	13,1513	9,2608	4,7247	1,1472	0,0432

Tabela 11 - Anuidades antecipadas, imediatas e vitalícias sob o status de último sobrevivente no Cenário 3

(Conclusão)					
Sob a hipótese de independência					
(x) – 10	17,9759	16,0985	13,1992	9,2156	4,6705
(x) – 5	17,2508	14,9353	11,4344	6,9577	2,6372
(x)	16,4007	13,5810	9,4449	4,6871	1,1349
(x) + 5	15,4362	12,0614	7,3229	2,6616	0,3162
(x) + 10	14,3900	10,4432	5,2404	1,1673	0,0432
Razão entre a hipótese de dependência e de independência					
(x) – 10	0,9911	0,9898	0,9935	0,9993	1,0000
(x) – 5	0,9841	0,9814	0,9875	0,9985	1,0000
(x)	0,9716	0,9657	0,9751	0,9966	1,0000
(x) + 5	0,9498	0,9367	0,9498	0,9920	1,0000
(x) + 10	0,9139	0,8868	0,9016	0,9828	1,0000

Fonte: Elaboração própria (2024).

Mais uma vez, observou-se um grande contraste entre as razões obtidas no Cenário 3 e nos demais. Para este caso, foi observada uma tendência de aumento da razão conforme o aumento das idades. Além disso, as maiores razões ocorrem quando as mulheres são mais jovens que os homens. Este comportamento pode ser observado em todos os grupos etários, mas é especialmente destacado nos grupos com 40, 50 e 60 anos. Destaca-se também que tanto para os casos em que o homem tem 70 e 80 anos quanto para os casos em que a diferença etária é de -10, -5 e 0 anos, a razão é muito próxima de 1, o que significa que as anuidades calculadas são próximas e que não haveria grande diferença entre considerar ou não a dependência entre os tempos residuais de vida dos segurados.

Com base nos valores apresentados para as anuidades, foi possível constatar divergência nos resultados, além do sentido da diferença e da dimensão da mesma, nos cenários desenvolvidos. Quanto à diferença, esta foi observada em praticamente todos os casos apresentados, com exceção: do Cenário 2, no grupo de anuidades no qual o homem tem 80 anos e a mulher, 85 e 90 anos; e do Cenário 3, no grupo de anuidades no qual o homem tem 80 anos.

Quanto ao sentido da diferença, sempre que esta ocorreu, o cálculo por independência resultou em valores maiores do que o cálculo pela dependência. Em outras palavras, se a dependência de fato ocorre, o cálculo por independência tende a superestimar o valor das anuidades sob o status de último sobrevivente.

Este mesmo resultado foi encontrado por Dufresne *et al.* (2018), a partir de uma cópula de Gumbel e para diferentes produtos relativos a rendas (anuidades) no status de último sobrevivente. Resultados semelhantes foram encontrados por Ji, Hardy e Li

(2011), a partir dos modelos de Markov e semi-Markov, que obtiveram razões entre as anuidades menores que 1 para diversas combinações de idade entre os segurados. Frees, Carriere e Valdez (1996) também observaram essa tendência, onde a maioria dos pares de idade apresentou razões menores que 1, no entanto, também obtiveram razões maiores que 1 nos pares em que a diferença etária entre o casal é maior que 20 anos.

Quanto à dimensão da diferença, destaca-se que cada cenário apresentou características distintas. O Cenário 1 apresentou, em média, razões intermediárias entre o segundo e o terceiro, que foram decrescentes conforme o aumento das idades, embora não tenha sido identificado um padrão claro em relação à diferença etária entre o homem e a mulher. No Cenário 2, que apresentou, em média, as menores razões, não se verificou um padrão sobre o aumento das idades, porém, conforme a idade da mulher aumenta em relação a do homem, as razões também aumentam. Já o Cenário 3 apresentou, em média, as maiores razões, que foram crescentes conforme o aumento das idades e, conforme a idade da mulher em relação a do homem aumenta, as razões diminuem.

Portanto, com base nos achados deste estudo e em pesquisas similares, evidencia-se uma tendência de superestimação dos valores das anuidades sob o status de último sobrevivente ao desconsiderar a dependência entre os tempos futuros de vida. Evidencia-se, também, dada a dimensão da diferença encontrada, que a hipótese de dependência não deve ser ignorada ao se realizarem cálculos atuariais para múltiplas vidas.

Outros produtos atuariais, como as anuidades sob o status de vida conjunta ou os seguros contra a morte para duas vidas sob ambos os status, podem ser obtidos diretamente por meio das relações entre estas e as anuidades de último sobrevivente, conforme descrito em Dickson, Hardy e Waters (2009, p. 266) e em Pires *et al.* (2021, p. 244, 247 e 251).

É importante enfatizar que para cada experiência de mortalidade diferente, foram obtidos resultados diferentes. Em outras palavras, no estudo da dependência, cada base de dados deve ser analisada individual e independentemente de outras. Isso se deve ao fato de que as características específicas de cada população observada influenciam tanto os resultados das análises paramétricas de sobrevivência – ao se definir a distribuição marginal a ser utilizada na função cópula –, quanto na seleção da função cópula em si, e, conseqüentemente, as anuidades calculadas.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com motivação nas evidências de dependência entre tempos futuros de vida de casais apontadas por Gobbi, Kolev e Mulinacci (2019), Henshaw, Constantinescu e Pamen (2020) e Lee e Cha (2018), bem como no possível impacto desta dependência nos cálculos atuariais, este estudo teve como objetivo analisar o efeito da dependência entre os tempos futuros de vida de indivíduos de um mesmo grupo sobre a precificação de rendas (anuidades) para casais.

Para atingir os objetivos propostos, foram seguidas as seguintes etapas: simulação das bases de dados, estimação das funções de sobrevivência, estimação dos modelos bivariados de dependência (utilizando uma função cópula) e o cálculo de anuidades antecipadas, imediatas e vitalícias sob o status de último sobrevivente.

Inicialmente, para a obtenção das bases de dados completas (2000 contratos, cada um com dois participantes, um homem e uma mulher), foram simuladas as idades no início da vigência e a data de vigência de cada contrato. Em seguida, foram simuladas as idades de morte subdivididas em três cenários: o primeiro, sob a tábua BR-EMS segregada por sexo; o segundo, sob a tábua IBGE 2015 para ambos os sexos; e o terceiro, sob a tábua IBGE 2015 segregada por sexo. Observou-se que o Cenário 1 gerou a menor quantidade de mortes no período definido, seguido pelo segundo e pelo terceiro.

O próximo passo foi realizar a análise de sobrevivência, de forma paramétrica e não paramétrica, para definir a distribuição estatística do tempo futuro de vida dos segurados em cada cenário e por sexo. Em todas as análises, a distribuição de Gompertz foi selecionada.

Os modelos de dependência foram criados a partir de funções cópulas, que utilizam os dados empíricos e as distribuições marginais Gompertz (definidas na análise paramétrica de sobrevivência), sendo selecionadas a cópula de Gumbel, Clayton e Clayton para o 1º, 2º e 3º Cenários, respectivamente.

Utilizando os modelos de dependência, foi possível calcular as anuidades desejadas. Os principais resultados provenientes desta análise indicam que, em geral, os cálculos de anuidades ao se supor a dependência são menores do que quando se supõe independência. Ou seja, caso constatada a dependência, o cálculo atuarial usual superestima os valores das anuidades sob o status de último sobrevivente. Além disso, foi possível verificar que cada cenário gerou resultados muito distintos,

evidenciando a individualidade dos cálculos por modelos de dependência. Também foi verificado que os estudos de dependência não devem ser ignorados, haja vista as diferenças significativas encontradas nos resultados das anuidades.

Dentre as limitações desta pesquisa, destaca-se a não obtenção das informações necessárias sobre as observações reais de seguradoras ou entidades de previdência, de modo que foi necessária a simulação da base de dados. Desta forma, sugere-se que sejam realizados em estudos futuros os mesmos procedimentos desta pesquisa em observações reais. Ademais, sugere-se o estudo da existência de dependência entre tempos futuros de vida para auxiliar na decisão sobre a aplicação, ou não, desta hipótese.

Espera-se que este trabalho contribua para a introdução deste tema, já estudado internacionalmente, na literatura atuarial nacional, ao apresentar um passo a passo metodológico para a estimação dos modelos de dependência, e ao divulgar estudos com diferentes propostas metodológicas para esta estimação.

REFERÊNCIAS

ABDON FILHO, Wilson Pinheiro. **Uma introdução à teoria das cópulas e sua aplicação à estimação do Valor em Risco e do Déficit Esperado**. 2019.

Dissertação (Mestrado) - Curso de Métodos Quantitativos em Finanças, Universidade de Coimbra, Coimbra, 2019.

AZEVEDO, Paulo Roberto Medeiros de. **Introdução à estatística**. 3 ed. Natal: EDUFRN, 2016.

BERG, Gerard J. van Den; DREPPER, Bettina. A Unique Bond: twin bereavement and lifespan associations of identical and fraternal twins. **Journal Of The Royal Statistical Society Series A: Statistics in Society**, [S.L.], v. 185, n. 2, p. 677-698, 21 mar. 2022. Oxford University Press (OUP). <http://dx.doi.org/10.1111/rssa.12789>.

BORGES, Alexandra Isabel Monteiro. **Análise de Sobrevivência com o R**. 2014. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade da Madeira, Funchal, 2014.

CABRAL FILHO, José Eulálio. A interrelação dos princípios metodológicos e dos princípios éticos na investigação e na publicação científica. **Revista Brasileira de Saúde Materno Infantil**, [S.L.], v. 4, n. 3, p. 225-228, set. 2004. FapUNIFESP (SciELO). <http://dx.doi.org/10.1590/s1519-38292004000300001>.

CANDELÁRIA, Wagner Tadeu de Freitas; QUINTO, Paola Mara de Oliveira. **Noções de atuária**. Londrina: Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2017. 168 p.

CARRIERE, Jacques F.. Bivariate Survival Models for Coupled Lives. **Scandinavian Actuarial Journal**, [S.L.], v. 2000, n. 1, p. 17-32, jan. 2000. Informa UK Limited. <http://dx.doi.org/10.1080/034612300750066700>.

COLOSIMO, Enrico Antônio; GIOLO, Suely Ruiz. **Análise de sobrevivência aplicada**. São Paulo: Edgard Blucher, 2006. 392 p.

DENUIT, Michel; FROSTIG, Esther; LEVIKSON, Benny. Shifts in Interest Rate and Common Shock Model for Coupled Lives. **Belgian Actuarial Bulletin**, [S. L.], v. 6, n. 1, jan. 2006.

DICKSON, David C. M.; HARDY, Mary R.; WATERS, Howard R.. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. [S.L.]: Cambridge University Press, 2009.

DUFRESNE, François *et al.* On age difference in joint lifetime modelling with life insurance annuity applications. **Annals Of Actuarial Science**, [S.L.], v. 12, n. 2, p. 350-371, 3 abr. 2018. Cambridge University Press (CUP). <http://dx.doi.org/10.1017/s1748499518000076>.

FERREIRA, Weber José. **Coleção introdução à ciência atuarial**: cálculos atuariais relativos às obrigações de segurados e segurador. Rio de Janeiro: IRB, 1985.

FREES, Edward W.; CARRIERE, Jacques; VALDEZ, Emiliano. Annuity Valuation with Dependent Mortality. **The Journal Of Risk And Insurance**, [S.L.], v. 63, n. 2, p. 229-261, jun. 1996. JSTOR. <http://dx.doi.org/10.2307/253744>.

GARCIA, Jorge Afonso; SIMÕES, Onofre Alves. **Matemática actuarial**: vida e pensões. Coimbra: Almedina, 2010.

GOBBI, Fabio; KOLEV, Nikolai; MULINACCI, Sabrina. Joint life insurance pricing using extended Marshal-Olkin models. **Astin Bulletin**, [S.L.], v. 49, n. 2, p. 409-432, 1 mar. 2019. Cambridge University Press (CUP). <http://dx.doi.org/10.1017/asb.2019.3>.

HOFERT, Marius *et al.* **copula: Multivariate Dependence with Copulas**. R package version 1.1-2, 2023. <https://CRAN.R-project.org/package=copula>

HENSHAW, Kira; CONSTANTINESCU, Corina; PAMEN, Olivier Menoukeu. Stochastic Mortality Modelling for Dependent Coupled Lives. **Risks**, [S.L.], v. 8, n. 1, p. 1-28, fev. 2020. <http://dx.doi.org/10.3390/risks8010017>.

HOUGAARD, Philip; HARVALD, Bent; HOLM, Niels V.. Measuring the Similarities Between the Lifetimes of Adult Danish Twins Born Between 1881-1930. **Journal Of The American Statistical Association**, [S.L.], v. 87, n. 417, p. 17-24, mar. 1992. JSTOR. <http://dx.doi.org/10.2307/2290447>.

JACKSON, Christopher. Flexsurv: a platform for parametric survival modeling inr. **Journal Of Statistical Software**, [S.L.], v. 70, n. 8, p. 1-33, 2016. Foundation for Open Access Statistic. <http://dx.doi.org/10.18637/jss.v070.i08>.

JAGGER, Carol; SUTTON, Christopher J.. Death after marital bereavement-is the risk increased? **Statistics In Medicine**, [S.L.], v. 10, n. 3, p. 395-404, mar. 1991. Wiley. <http://dx.doi.org/10.1002/sim.4780100311>.

JI, Min; HARDY, Mary; LI, Johnny Siu-Hang. Markovian Approaches to Joint-Life Mortality. **North American Actuarial Journal**, [S.L.], v. 15, n. 3, p. 357-376, jul. 2011. Informa UK Limited. <http://dx.doi.org/10.1080/10920277.2011.10597625>.

LEE, Hyunju; CHA, Ji Hwan. A dynamic bivariate common shock model with cumulative effect and its actuarial application. **Scandinavian Actuarial Journal**, [S.L.], v. 2018, n. 10, p. 890-906, 11 maio 2018. Informa UK Limited <http://dx.doi.org/10.1080/03461238.2018.1470562>.

LU, Yang. Broken-heart, common life, heterogeneity: analyzing the spousal mortality dependence. **Astin Bulletin**, [S.L.], v. 47, n. 3, p. 837-874, 20 abr. 2017. Cambridge University Press (CUP). <http://dx.doi.org/10.1017/asb.2017.8>.

LUCIANO, Elisa; SPREEUW, Jaap; VIGNA, Elena. Modelling stochastic mortality for dependent lives. **Insurance: Mathematics and Economics**, [S.L.], v. 43, n. 2, p. 234-244, out. 2008. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.insmatheco.2008.06.005>.

MAGALHÃES, Marcos Nascimento. **Probabilidade e Variáveis Aleatórias**. 3. ed. São Paulo: Edusp, 2011. 424 p.

MARSHALL, Albert W.; OLKIN, Ingram. A Multivariate Exponential Distribution. **Journal Of The American Statistical Association**, [S.L.], v. 62, n. 317, p. 30-44, mar. 1967. Informa UK Limited. <http://dx.doi.org/10.1080/01621459.1967.10482885>

NAGLER, Thomas *et al.* **VineCopula: Statistical Inference of Vine Copulas**. R package version 2.5.0,. 2023. <https://CRAN.R-project.org/package=VineCopula>

NELSEN, Roger B. **An introduction to Copulas**. 2. ed. [S. L.]: Springer, 2006.

NIEMI, Timo. The Mortality of Male Old-age Pensioners Following Spouse's Death. **Scandinavian Journal Of Social Medicine**, [S.L.], v. 7, n. 3, p. 115-117, set. 1979. SAGE Publications. <http://dx.doi.org/10.1177/140349487900700303>

NORBERG, Ragnar. Actuarial analysis of dependent lives. **Schweizerische Vereinigung Der Versicherungsmathematiker**, [S.L.], p. 243-254, 1989. Schweizerische Vereinigung der Versicherungsmathematiker. <http://dx.doi.org/10.5169/SEALS-967219>.

Panjer, H. Second-to-Die with possibility of simultaneous death. **Product Development News**, [S.L.], 1994.

PARKES, C. M.; BENJAMIN, B.; FITZGERALD, R. G. Broken Heart: a statistical study of increased mortality among widowers. **Bmj**, [S.L.], v. 1, n. 5646, p. 740-743, 22 mar. 1969. *BMJ*. <http://dx.doi.org/10.1136/bmj.1.5646.740>.

PIRES, Danilo Machado *et al.* **Fundamentos da Matemática Atuarial**: vida e pensões. Curitiba: Editora CRV, 2021. 304 p.

R Core Team (2023). **R**: A Language and Environment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. <<https://www.R-project.org/>>.

RODRIGUES, José Ângelo. **Gestão de Risco Atuarial**. 1ª. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2008.

SANDERS, Lianne; MELENBERG, Bertrand. Estimating the joint survival probabilities of married individuals. **Insurance: Mathematics and Economics**, [S.L.], v. 67, p. 88-106, mar. 2016. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.insmatheco.2015.12.006>.

SERRANO, Ana Sofia Alves. **Rendas vitalícias sobre casais**. 2013. 84 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade do Minho, Braga, 2013.

SANTOS JÚNIOR, Luiz Carlos. **Análise de sobrevivência aplicada a premissas atuariais**: o caso da previdência pública municipal de Cabedelo/PB. Tese apresentada à Universidade Estadual Paulista. 185 p. Botucatu, SP, 2018.

SHEMYAKIN, Arkady; KNIAZEV, Alexander. **Introduction to Bayesian estimation and copula models of dependence**. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc, 2017.

SPREEUW, Jaap; WANG, Xu. Modelling the short-term dependence between two remaining lifetimes. **Cass Business School Discussion Paper**, v. 2, n. 3, 2008.

THERNEAU, Terry M. **A Package for Survival Analysis in R**. R package version 3.5-7, 2023. <https://CRAN.R-project.org/package=survival>.

VILANOVA, Wilson. **Matemática atuarial**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1969.

WINDHOLZ, Michael J.; MARMAR, Charles R.; HOROWITZ, Mardi J.. A review of the research on conjugal bereavement: impact on health and efficacy of intervention. **Comprehensive Psychiatry**, [S.L.], v. 26, n. 5, p. 433-447, set. 1985. Elsevier BV. [http://dx.doi.org/10.1016/0010-440x\(85\)90080-x](http://dx.doi.org/10.1016/0010-440x(85)90080-x).

WOLTHUIS, H. Life Insurance Mathematics (The Markovian Model) IAE. **Universiteit van Amsterdam, Amsterdam**, 2003.

YOUN, Heekyung; SHEMYAKIN, Arkady. Statistical aspects of joint life insurance pricing. **Proceedings Of The Business And Statistics Section Of The American Statistical Association**, Saint Thomas, v. 34138, p. 34-38, jan. 1999.

YOUN, Heekyung; SHEMYAKIN, Arkady. Pricing practices for joint last survivor insurance. **Actuarial Research Clearing House**, v. 1, n. 2, p. 3, 2001.

APÊNDICES

APÊNDICE A – CÓDIGOS

```
##### Instalação dos pacotes
# install.packages("survival")
# install.packages("flexsurv")
# install.packages("tidyverse")
# install.packages("copula")
# install.packages("VineCopula")
##### Carregamento dos pacotes
library(tidyverse)
library(survival)
library(flexsurv)
library(copula)
library(VineCopula)
### Definindo a seed para reprodutibilidade
set.seed(1)
##### 1. Simulação dos dados
###Definindo os parâmetros
### número de contratos
n = 2000
### Data de início das observações
t_obs <- as.Date("01/01/2010", format = "%d/%m/%Y")
### Data do final das observações
t_f <- as.Date("31/12/2023", format = "%d/%m/%Y")
### Idades dos segurados homens
idades_m <- trunc(rgamma(n, shape = 70, rate = 1.2))
### Idades das seguradas mulheres
idades_f <- trunc(idades_m + runif(n, -10, 10))
### Ajuste dos decimais
idades_m <- idades_m + runif(n, 0, 0.99)
idades_f <- idades_f + runif(n, 0, 0.99)
### Datas de início da vigência
t_i_sim <- sample(seq(as.Date("2005-01-01"), t_f, by = "day"), n, replace = TRUE)
### Data frames com as informações
df_m <- data.frame("idade" = idades_m, "idade_morte" = NA)
df_m <- df_m %>%
  mutate(contrato = seq(1, nrow(df_m), 1), inicio_vigencia = t_i_sim, .before = idade)
%>%
  mutate(sexo = "m")
df_f <- data.frame("idade" = idades_f, "idade_morte" = NA)
df_f <- df_f %>%
  mutate(contrato = seq(1, nrow(df_f), 1), inicio_vigencia = t_i_sim, .before = idade)
%>%
  mutate(sexo = "f")
##### 1º CENÁRIO
### Armazenar as mortalidades (OBS: O BANCO DE TÁBUAS FOI CARREGADO À
PRIORI)
# Tábua BR-EMS 2021 m
qx1_m <- as.vector(na.omit(banco_de_tabuas$BR.EMSmt.v.2021.m))
```

```

# Tábua BR-EMS 2021 f
qx1_f <- as.vector(na.omit(banco_de_tabuas$BR.EMSmt.v.2021.f))
### Criar os data frames para o 1º cenário
df1_m <- df_m
df1_f <- df_f
### Simulação das idades de morte com base na tábua
# Homens
for (i in 1:nrow(df1_m)) {
  for (j in df1_m$idade[i]:length(qx1_m)){
    if (runif(1, 0, 1) < qx1_m[j + 1]) {
      df1_m$idade_morte[i] <- j + runif(1, 0, 0.999 + j - trunc(j))
      break
    }
  }
}
# Mulheres
for (i in 1:nrow(df1_f)) {
  for (j in df1_f$idade[i]:length(qx1_f)){
    if (runif(1, 0, 1) < qx1_f[j + 1]) {
      df1_f$idade_morte[i] <- j + runif(1, 0, 0.999 + j - trunc(j))
      break
    }
  }
}
### Data de nascimento, data da morte e ajuste idade da morte
df1_m <- df1_m %>%
  mutate(nascimento = inicio_vigencia - idade * 365.25,
         data_morte = if_else(nascimento + idade_morte * 365.25 > t_f,
                              NA, nascimento + idade_morte * 365.25),
         idade_morte = if_else(is.na(data_morte), NA, idade_morte))
df1_f <- df1_f %>%
  mutate(nascimento = inicio_vigencia - idade * 365.25,
         data_morte = if_else(nascimento + idade_morte * 365.25 > t_f,
                              NA, nascimento + idade_morte * 365.25),
         idade_morte = if_else(is.na(data_morte), NA, idade_morte))
### Data frame para centralizar as informações
df1 <- rbind(df1_m, df1_f)
##### 2º CENÁRIO
### Armazenar as mortalidades (OBS: O BANCO DE TÁBUAS FOI CARREGADO À
PRIORI)
# Tábua IBGE 2015 ambos os sexos
qx2_m <- as.vector(na.omit(banco_de_tabuas$IBGE.2015..Ambos.os.Sexos))
# Tábua IBGE 2015 ambos os sexos
qx2_f <- as.vector(na.omit(banco_de_tabuas$IBGE.2015..Ambos.os.Sexos))
### Criar os data frames para o 2º cenário
df2_m <- df_m
df2_f <- df_f
### Simulação das idades de morte com base na tábua
# Homens
for (i in 1:nrow(df2_m)) {

```

```

for (j in df2_m$idade[i]:length(qx2_m)){
  if (runif(1, 0, 1) < qx2_m[j + 1]) {
    df2_m$idade_morte[i] <- j + runif(1, 0, 0.999 + j - trunc(j))
    break
  }
}
}
}
# Mulheres
for (i in 1:nrow(df2_f)) {
  for (j in df2_f$idade[i]:length(qx2_f)){
    if (runif(1, 0, 1) < qx2_f[j + 1]) {
      df2_f$idade_morte[i] <- j + runif(1, 0, 0.999 + j - trunc(j))
      break
    }
  }
}
}
### Data de nascimento, data da morte e ajuste idade da morte
df2_m <- df2_m %>%
  mutate(nascimento = inicio_vigencia - idade * 365.25,
         data_morte = if_else(nascimento + idade_morte * 365.25 > t_f,
                              NA, nascimento + idade_morte * 365.25),
         idade_morte = if_else(is.na(data_morte), NA, idade_morte))
df2_f <- df2_f %>%
  mutate(nascimento = inicio_vigencia - idade * 365.25,
         data_morte = if_else(nascimento + idade_morte * 365.25 > t_f,
                              NA, nascimento + idade_morte * 365.25),
         idade_morte = if_else(is.na(data_morte), NA, idade_morte))
### Data frame para centralizar as informações
df2 <- rbind(df2_m, df2_f)
##### 3º CENÁRIO
### Armazenar as mortalidades (OBS: O BANCO DE TÁBUAS FOI CARREGADO À
PRIORI)
# Tábua IBGE 2015 Homens
qx3_m <- as.vector(na.omit(banco_de_tabuas$IBGE.2015..Homens))
# Tábua IBGE 2015 Mulheres
qx3_f <- as.vector(na.omit(banco_de_tabuas$IBGE.2015.Mulheres))
### Criar os data frames para o 2º cenário
df3_m <- df_m
df3_f <- df_f
### Simulação das idades de morte com base na tábua
# Homens
for (i in 1:nrow(df3_m)) {
  for (j in df3_m$idade[i]:length(qx3_m)){
    if (runif(1, 0, 1) < qx3_m[j + 1]) {
      df3_m$idade_morte[i] <- j + runif(1, 0, 0.999 + j - trunc(j))
      break
    }
  }
}
}
}
# Mulheres

```

```

for (i in 1:nrow(df3_f)) {
  for (j in df3_f$idade[i]:length(qx3_f)){
    if (runif(1, 0, 1) < qx3_f[j + 1]) {
      df3_f$idade_morte[i] <- j + runif(1, 0, 0.999 + j - trunc(j))
      break
    }
  }
}
}
### Data de nascimento, data da morte e ajuste idade da morte
df3_m <- df3_m %>%
  mutate(nascimento = inicio_vigencia - idade * 365.25,
         data_morte = if_else(nascimento + idade_morte * 365.25 > t_f,
                              NA, nascimento + idade_morte * 365.25),
         idade_morte = if_else(is.na(data_morte), NA, idade_morte))
df3_f <- df3_f %>%
  mutate(nascimento = inicio_vigencia - idade * 365.25,
         data_morte = if_else(nascimento + idade_morte * 365.25 > t_f,
                              NA, nascimento + idade_morte * 365.25),
         idade_morte = if_else(is.na(data_morte), NA, idade_morte))
### Data frame para centralizar as informações
df3 <- rbind(df3_m, df3_f)
##### Estatísticas descritivas
# Geral - idades no início da vigência
summary(df_m$idade)
sd(df_m$idade)
summary(df_f$idade)
sd(df_f$idade)
# Cenário 1
summary(df1_m$idade_morte)
sd(na.omit(df1_m$idade_morte))
summary(df1_f$idade_morte)
sd(na.omit(df1_f$idade_morte))
# Cenário 2
summary(df2_m$idade_morte)
sd(na.omit(df2_m$idade_morte))
summary(df2_f$idade_morte)
sd(na.omit(df2_f$idade_morte))
# Cenário 3
summary(df3_m$idade_morte)
sd(na.omit(df3_m$idade_morte))
summary(df3_f$idade_morte)
sd(na.omit(df3_f$idade_morte))
### Visualização das curvas de mortalidade
plot(log(qx1_m), type = "l", col = "blue", xlab = "Idade",
     ylab = "log(qx)", lwd = 1.5)
lines(log(qx1_f), col = "red", lwd = 1.5)
lines(log(qx2_m), col = "green", lwd = 1.5)
lines(log(qx3_m), col = "orange", lwd = 1.5)
lines(log(qx3_f), col = "pink", lwd = 1.5)
legend(x = "topleft", col = c("blue", "red", "green", "orange", "pink"),

```

```

legend = c("BR-EMS 2021 M", "BR-EMS 2021 F", "IBGE 2015 Ambos os
sexos", "IBGE 2015 M", "IBGE 2015 F"),
lwd = 1.5, bty = "n", lty = 1)
# Remover as variáveis que não serão mais utilizadas
rm(list = c("banco_de_tabuas", "df_m", "df_f", "df1_m", "df1_f", "df2_m", "df2_f",
"df3_m", "df3_f", "i", "j", "idades_f", "idades_m", "qx1_m", "qx1_f",
"qx2_m", "qx2_f", "qx3_m", "qx3_f", "t_i_sim", "url"))
##### Tratamento dos dados - Cenário 1
df1 <- df1 %>%
  mutate(idade_vigencia = as.numeric(inicio_vigencia - nascimento)/365.25)
df1 <- df1 %>%
  mutate(a = pmax(as.numeric((t_obs - inicio_vigencia)/365.25), 0))
df1 <- df1 %>%
  mutate(idade_entrada = idade_vigencia + a)
contratos_remove <- df1 %>%
  filter(idade_entrada > idade_morte) %>%
  select(contrato) %>%
  distinct()
contratos_remove <- as.vector(contratos_remove$contrato)
df1 <- df1 %>%
  filter(!contrato %in% contratos_remove)
df1 <- df1 %>%
  mutate(b = as.numeric(t_f - pmax(t_obs, inicio_vigencia))/365.25)
df1 <- df1 %>%
  mutate(tempo_futuro = idade_morte - idade_entrada)
df1 <- df1 %>%
  mutate(tempo_censura = if_else(is.na(tempo_futuro), b, pmin(tempo_futuro, b)))
df1 <- df1 %>%
  mutate(censura = if_else(tempo_censura != b, 1, 0))
### Bases finais
df1_m <- df1 %>%
  filter(sexo == "m") %>%
  select(idade_entrada, tempo_censura, censura)
df1_f <- df1 %>%
  filter(sexo == "f") %>%
  select(idade_entrada, tempo_censura, censura)
##### Tratamento dos dados - Cenário 2
df2 <- df2 %>%
  mutate(idade_vigencia = as.numeric(inicio_vigencia - nascimento)/365.25)
df2 <- df2 %>%
  mutate(a = pmax(as.numeric((t_obs - inicio_vigencia)/365.25), 0))
df2 <- df2 %>%
  mutate(idade_entrada = idade_vigencia + a)
contratos_remove <- df2 %>%
  filter(idade_entrada > idade_morte) %>%
  select(contrato) %>%
  distinct()
contratos_remove <- as.vector(contratos_remove$contrato)
df2 <- df2 %>%
  filter(!contrato %in% contratos_remove)

```

```

df2 <- df2 %>%
  mutate(b = as.numeric(t_f - pmax(t_obs, inicio_vigencia))/365.25)
df2 <- df2 %>%
  mutate(tempo_futuro = idade_morte - idade_entrada)
df2 <- df2 %>%
  mutate(tempo_censura = if_else(is.na(tempo_futuro), b, pmin(tempo_futuro, b)))
df2 <- df2 %>%
  mutate(censura = if_else(tempo_censura != b, 1, 0))
### Bases finais
df2_m <- df2 %>%
  filter(sexo == "m") %>%
  select(idade_entrada, tempo_censura, censura)
df2_f <- df2 %>%
  filter(sexo == "f") %>%
  select(idade_entrada, tempo_censura, censura)
##### Tratamento dos dados - Cenário 3
df3 <- df3 %>%
  mutate(idade_vigencia = as.numeric(inicio_vigencia - nascimento)/365.25)
df3 <- df3 %>%
  mutate(a = pmax(as.numeric((t_obs - inicio_vigencia)/365.25), 0))
df3 <- df3 %>%
  mutate(idade_entrada = idade_vigencia + a)
contratos_remove <- df3 %>%
  filter(idade_entrada > idade_morte) %>%
  select(contrato) %>%
  distinct()
contratos_remove <- as.vector(contratos_remove$contrato)
df3 <- df3 %>%
  filter(!contrato %in% contratos_remove)
df3 <- df3 %>%
  mutate(b = as.numeric(t_f - pmax(t_obs, inicio_vigencia))/365.25)
df3 <- df3 %>%
  mutate(tempo_futuro = idade_morte - idade_entrada)
df3 <- df3 %>%
  mutate(tempo_censura = if_else(is.na(tempo_futuro), b, pmin(tempo_futuro, b)))
df3 <- df3 %>%
  mutate(censura = if_else(tempo_censura != b, 1, 0))
### Bases finais
df3_m <- df3 %>%
  filter(sexo == "m") %>%
  select(idade_entrada, tempo_censura, censura)
df3_f <- df3 %>%
  filter(sexo == "f") %>%
  select(idade_entrada, tempo_censura, censura)
### Remover as variáveis que não serão mais utilizadas
rm(list=c("df1", "df2", "df3", "contratos_remove", "t_f", "t_obs"))
##### Análise não paramétrica de sobrevivência (Kaplan-Meier) - 1º cenário
tempo1_m <- df1_m$tempo_censura
status1_m <- df1_m$censura
idades_entrada1_m <- df1_m$idade_entrada

```

```

tempo1_f <- df1_f$tempo_censura
status1_f <- df1_f$censura
idades_entrada1_f <- df1_f$idade_entrada
# Estimação da função de sobrevivência por Kaplan-Meier Masculino - 1º cenário
ekm1_m <- survfit(Surv(tempo1_m + idades_entrada1_m, status1_m) ~ 1, conf.type =
"plain")
plot(ekm1_m, col = c("black", "red", "blue"),
      xlab = "Idade (em anos)", ylab = "S(t) estimada", xlim = c(40,100))
legend(x = "bottomleft", col = c("black", "red", "blue"), legend = c("Pontual", "Interv. LI",
"Interv. LS"),
       lwd = 1, bty = "n", lty = c(1, 2, 2))
# Estimação da função de sobrevivência por Kaplan-Meier Feminino - 1º cenário
ekm1_f <- survfit(Surv(tempo1_f + idades_entrada1_f, status1_f) ~ 1, conf.type =
"plain")
plot(ekm1_f, col = c("black", "red", "blue"),
      xlab = "Idade (em anos)", ylab = "S(t) estimada", xlim=c(40,100))
legend(x = "bottomleft", col = c("black", "red", "blue"), legend = c("Pontual", "Interv. LI",
"Interv. LS"),
       lwd = 1, bty = "n", lty = c(1, 2, 2))
##### Análise não paramétrica de sobrevivência (Kaplan-Meier) - 2º cenário
tempo2_m <- df2_m$tempo_censura
status2_m <- df2_m$censura
idades_entrada2_m <- df2_m$idade_entrada
tempo2_f <- df2_f$tempo_censura
status2_f <- df2_f$censura
idades_entrada2_f <- df2_f$idade_entrada
# Estimação da função de sobrevivência por Kaplan-Meier Masculino - 2º cenário
ekm2_m <- survfit(Surv(tempo2_m + idades_entrada2_m, status2_m) ~ 1, conf.type =
"plain")
plot(ekm2_m, col = c("black", "red", "blue"),
      xlab = "Idade (em anos)", ylab = "S(t) estimada", xlim = c(40,100))
legend(x = "bottomleft", col = c("black", "red", "blue"), legend = c("Pontual", "Interv. LI",
"Interv. LS"),
       lwd = 1, bty = "n", lty = c(1, 2, 2))
# Estimação da função de sobrevivência por Kaplan-Meier Feminino - 2º cenário
ekm2_f <- survfit(Surv(tempo2_f + idades_entrada2_f, status2_f) ~ 1, conf.type =
"plain")
plot(ekm2_f, col = c("black", "red", "blue"),
      xlab = "Idade (em anos)", ylab = "S(t) estimada", xlim = c(40,100))
legend(x = "bottomleft", col = c("black", "red", "blue"), legend = c("Pontual", "Interv. LI",
"Interv. LS"),
       lwd = 1, bty = "n", lty = c(1, 2, 2))
##### Análise não paramétrica de sobrevivência (Kaplan-Meier) - 3º cenário
tempo3_m <- df3_m$tempo_censura
status3_m <- df3_m$censura
idades_entrada3_m <- df3_m$idade_entrada
tempo3_f <- df3_f$tempo_censura
status3_f <- df3_f$censura
idades_entrada3_f <- df3_f$idade_entrada
# Estimação da função de sobrevivência por Kaplan-Meier Masculino - 3º cenário

```

```

ekm3_m <- survfit(Surv(tempo3_m + idades_entrada3_m, status3_m) ~ 1, conf.type =
"plain")
plot(ekm3_m, col = c("black", "red", "blue"),
     xlab = "Idade (em anos)", ylab = "S(t) estimada", xlim = c(40,100))
legend(x = "bottomleft", col = c("black", "red", "blue"), legend = c("Pontual", "Interv. LI",
"Interv. LS"),
      lwd = 1, bty = "n", lty = c(1, 2, 2))
# Estimação da função de sobrevivência por Kaplan-Meier Feminino - 3º cenário
ekm3_f <- survfit(Surv(tempo3_f + idades_entrada3_f, status3_f) ~ 1, conf.type =
"plain")
plot(ekm3_f, col = c("black", "red", "blue"),
     xlab = "Idade (em anos)", ylab = "S(t) estimada", xlim = c(40,100))
legend(x = "bottomleft", col = c("black", "red", "blue"), legend = c("Pontual", "Interv. LI",
"Interv. LS"),
      lwd = 1, bty = "n", lty = c(1, 2, 2))
##### Análise paramétrica de sobrevivência - 1º cenário
### Masculino
gomp1_m <- flexsurvreg(Surv(tempo1_m, status1_m) ~ idades_entrada1_m, dist =
"gompertz")
weib1_m <- flexsurvreg(Surv(tempo1_m, status1_m) ~ idades_entrada1_m, dist =
"weibull")
gamma1_m <- flexsurvreg(Surv(tempo1_m, status1_m) ~ idades_entrada1_m, dist =
"gamma")
gengamma1_m <- flexsurvreg(Surv(tempo1_m, status1_m) ~ idades_entrada1_m,
dist = "gengamma.orig")
# TRV
llgomp1_m <- 2 * (gengamma1_m$loglik - gomp1_m$loglik)
llweib1_m <- 2 * (gengamma1_m$loglik - weib1_m$loglik)
llgamma1_m <- 2 * (gengamma1_m$loglik - gamma1_m$loglik)
data.frame("Distribuição" = c("Gompertz", "Weibull", "Gamma"),
          "TRV" = c(llgomp1_m, llweib1_m, llgamma1_m),
          "p-valor" = c(pchisq(llgomp1_m, 2), pchisq(llweib1_m, 1), pchisq(llgamma1_m, 1)))
# AIC
c("Gompertz" = AIC(gomp1_m),
  "Weibull" = AIC(weib1_m),
  "Gamma" = AIC(gamma1_m))
### Feminino
gomp1_f <- flexsurvreg(Surv(tempo1_f, status1_f) ~ idades_entrada1_f, dist =
"gompertz")
weib1_f <- flexsurvreg(Surv(tempo1_f, status1_f) ~ idades_entrada1_f, dist =
"weibull")
gamma1_f <- flexsurvreg(Surv(tempo1_f, status1_f) ~ idades_entrada1_f, dist =
"gamma")
gengamma1_f <- flexsurvreg(Surv(tempo1_f, status1_f) ~ idades_entrada1_f, dist =
"gengamma.orig")
# TRV
llgomp1_f <- 2 * (gengamma1_f$loglik - gomp1_f$loglik)
llweib1_f <- 2 * (gengamma1_f$loglik - weib1_f$loglik)
llgamma1_f <- 2 * (gengamma1_f$loglik - gamma1_f$loglik)

```

```

data.frame("Distribuição" = c("Gompertz","Weibull","Gamma"),
          "TRV" = c(llgomp1_f, llweib1_f, llgamma1_f),
          "p-valor" = 1 - c(pchisq(llgomp1_f,2),pchisq(llweib1_f,1),pchisq(llgamma1_f,1)))
# AIC
c("Gompertz" = AIC(gomp1_f),
  "Weibull" = AIC(weib1_f),
  "Gamma" = AIC(gamma1_f))
##### Análise paramétrica de sobrevivência - 2º cenário
### Masculino
gomp2_m <- flexsurvreg(Surv(tempo2_m, status2_m) ~ idades_entrada2_m, dist =
"gomperztz")
weib2_m <- flexsurvreg(Surv(tempo2_m, status2_m) ~ idades_entrada2_m, dist =
"weibull")
gamma2_m <- flexsurvreg(Surv(tempo2_m, status2_m) ~ idades_entrada2_m, dist =
"gamma")
gengamma2_m <- flexsurvreg(Surv(tempo2_m, status2_m) ~ idades_entrada2_m,
dist = "gengamma.orig")
# TRV
llgomp2_m <- 2 * (gengamma2_m$loglik - gomp2_m$loglik)
llweib2_m <- 2 * (gengamma2_m$loglik - weib2_m$loglik)
llgamma2_m <- 2 * (gengamma2_m$loglik - gamma2_m$loglik)
data.frame("Distribuição" = c("Gompertz","Weibull","Gamma"),
          "TRV" = c(llgomp2_m, llweib2_m, llgamma2_m),
          "p-valor" = 1 -
c(pchisq(llgomp2_m,2),pchisq(llweib2_m,1),pchisq(llgamma2_m,1)))
# AIC
c("Gompertz" = AIC(gomp2_m),
  "Weibull" = AIC(weib2_m),
  "Gamma" = AIC(gamma2_m))
### Feminino
gomp2_f <- flexsurvreg(Surv(tempo2_f, status2_f) ~ idades_entrada2_f, dist =
"gomperztz")
weib2_f <- flexsurvreg(Surv(tempo2_f, status2_f) ~ idades_entrada2_f, dist =
"weibull")
gamma2_f <- flexsurvreg(Surv(tempo2_f, status2_f) ~ idades_entrada2_f, dist =
"gamma")
gengamma2_f <- flexsurvreg(Surv(tempo2_f, status2_f) ~ idades_entrada2_f, dist =
"gengamma.orig")
# TRV
llgomp2_f <- 2 * (gengamma2_f$loglik - gomp2_f$loglik)
llweib2_f <- 2 * (gengamma2_f$loglik - weib2_f$loglik)
llgamma2_f <- 2 * (gengamma2_f$loglik - gamma2_f$loglik)
data.frame("Distribuição" = c("Gompertz","Weibull","Gamma"),
          "TRV" = c(llgomp2_f, llweib2_f, llgamma2_f),
          "p-valor" = 1 - c(pchisq(llgomp2_f,2),pchisq(llweib2_f,1),pchisq(llgamma2_f,1)))
# AIC
c("Gompertz" = AIC(gomp2_f),
  "Weibull" = AIC(weib2_f),
  "Gamma" = AIC(gamma2_f))
##### Análise paramétrica de sobrevivência - 3º cenário

```

```

### Masculino
gomp3_m <- flexsurvreg(Surv(tempo3_m, status3_m) ~ idades_entrada3_m, dist =
"gomperz")
weib3_m <- flexsurvreg(Surv(tempo3_m, status3_m) ~ idades_entrada3_m, dist =
"weibull")
gamma3_m <- flexsurvreg(Surv(tempo3_m, status3_m) ~ idades_entrada3_m, dist =
"gamma")
gengamma3_m <- flexsurvreg(Surv(tempo3_m, status3_m) ~ idades_entrada3_m,
dist = "gengamma.orig")
# TRV
llgomp3_m <- 2 * (gengamma3_m$loglik - gomp3_m$loglik)
llweib3_m <- 2 * (gengamma3_m$loglik - weib3_m$loglik)
llgamma3_m <- 2 * (gengamma3_m$loglik - gamma3_m$loglik)
data.frame("Distribuição" = c("Gompertz","Weibull","Gamma"),
          "TRV" = c(llgomp3_m, llweib3_m, llgamma3_m),
          "p-valor" = c(1 - c(pchisq(llgomp3_m,2),pchisq(llweib3_m,1),pchisq(llgamma3_m,1)))
# AIC
c("Gompertz" = AIC(gomp3_m),
  "Weibull" = AIC(weib3_m),
  "Gamma" = AIC(gamma3_m))
### Feminino
gomp3_f <- flexsurvreg(Surv(tempo3_f, status3_f) ~ idades_entrada3_f, dist =
"gomperz")
weib3_f <- flexsurvreg(Surv(tempo3_f, status3_f) ~ idades_entrada3_f, dist =
"weibull")
gamma3_f <- flexsurvreg(Surv(tempo3_f, status3_f) ~ idades_entrada3_f, dist =
"gamma")
gengamma3_f <- flexsurvreg(Surv(tempo3_f, status3_f) ~ idades_entrada3_f, dist =
"gengamma.orig")
# TRV
llgomp3_f <- 2 * (gengamma3_f$loglik - gomp3_f$loglik)
llweib3_f <- 2 * (gengamma3_f$loglik - weib3_f$loglik)
llgamma3_f <- 2 * (gengamma3_f$loglik - gamma3_f$loglik)
data.frame("Distribuição" = c("Gompertz","Weibull","Gamma"),
          "TRV" = c(llgomp3_f, llweib3_f, llgamma3_f),
          "p-valor" = 1 - c(pchisq(llgomp3_f,2),pchisq(llweib3_f,1),pchisq(llgamma3_f,1)))
# AIC
c("Gompertz" = AIC(gomp3_f),
  "Weibull" = AIC(weib3_f),
  "Gamma" = AIC(gamma3_f))
# MANTER APENAS A DISTRIBUIÇÃO ESCOLHIDA + AS INFORMAÇÕES
NECESSÁRIAS
remover <- data.frame("a" = ls())
remover <- remover %>%
  filter(!a %in% c("n","df1_m","df1_f","df2_m","df2_f","df3_m","df3_f", "gomp1_m",
"gomp1_f",
          "gomp2_m",          "gomp2_f",          "gomp3_m",          "gomp3_f",
"tempo1_m","tempo1_f","tempo2_m","tempo2_f",
          "tempo3_m","tempo3_f"))

```

```

rm(list = c(remover$a))
rm(remover)
##### Modelo de dependência - 1º cenário
### Pseudo-observações empíricas
epobs1 <- pobs(cbind(tempo1_m, tempo1_f))
epobs1_m <- epobs1[,1]
epobs1_f <- epobs1[,2]
### Selecionar as cópulas pelo método "AIC"
emp1 <- BiCopSelect(epobs1_m, epobs1_f, familyset = 3:6, selectioncrit = "AIC",
rotations = FALSE)
### Cópula selecionada
emp1$familyname
### Criação da função cópula
Cop1 <- archmCopula(family = "gumbel", dim = 2, param = emp1$par)
ebiv1 <- mvdc(copula = Cop1, margins = c("gompertz","gompertz"),
paramMargins = list(list(shape=gomp1_m$res[1],rate=gomp1_m$res[2]),
list(shape=gomp1_f$res[1],rate=gomp1_f$res[2])))
##### Modelo de dependência - 2º cenário
### Pseudo-observações empíricas
epobs2 <- pobs(cbind(tempo2_m,tempo2_f))
epobs2_m <- epobs2[,1]
epobs2_f <- epobs2[,2]
### Selecionar as cópulas pelo método "AIC"
emp2 <- BiCopSelect(epobs2_m, epobs2_f, familyset = 3:6, selectioncrit = "AIC",
rotations = FALSE)
### Cópula selecionada
emp2$familyname
### Criação da função cópula
Cop2 <- archmCopula(family = "clayton", dim = 2, param = emp2$par)
ebiv2 <- mvdc(copula = Cop2, margins = c("gompertz","gompertz"),
paramMargins = list(list(shape=gomp2_m$res[1],rate=gomp2_m$res[2]),
list(shape=gomp2_f$res[1],rate=gomp2_f$res[2])))
##### Modelo de dependência - 3º cenário
### Pseudo-observações empíricas
epobs3 <- pobs(cbind(tempo3_m, tempo3_f))
epobs3_m <- epobs3[,1]
epobs3_f <- epobs3[,2]
### Selecionar as cópulas pelo método "AIC"
emp3 <- BiCopSelect(epobs3_m, epobs3_f, familyset = 3:6, selectioncrit = "AIC",
rotations = FALSE)
### Cópula selecionada
emp3$familyname
### Criação da função cópula
Cop3 <- archmCopula(family = "clayton", dim = 2, param = emp3$par)
ebiv3 <- mvdc(copula = Cop3, margins = c("gompertz","gompertz"),
paramMargins = list(list(shape=gomp3_m$res[1],rate=gomp3_m$res[2]),
list(shape=gomp3_f$res[1],rate=gomp3_f$res[2])))
##### Cálculo das anuidades - 1º cenário
w1 <- 117 # última idade da tábua
i <- 0.05 # Taxa de Juros

```

```

v <- 1/(1+i)
x <- c(40, 50, 60, 70, 80)
nome_linhas <- c("-10", "-5", "0", "5", "10")
nome_colunas <- c("40", "50", "60", "70", "80")
a_ind1 <- as.data.frame(matrix(nrow = 5, ncol = 5), row.names = nome_linhas)
names(a_ind1) <- nome_colunas
a_dep1 <- a_ind1
a_raz1 <- a_dep1
for(j in 1:ncol(a_ind1)){
  x = as.numeric(names(a_ind1)[j])
  for(k in 1:nrow(a_ind1)){
    y = x + (as.numeric(row.names(a_ind1)[k]))
    t1 = 0:(min(w1 - x, w1 - y))
    # Cálculo supondo independência
    px1 = (1 - pgompertz(x + t1, shape=gomp1_m$res[1], rate=gomp1_m$res[2]))
    py1 = (1 - pgompertz(y + t1, shape=gomp1_f$res[1], rate=gomp1_f$res[2]))
    pxyus1 = px1 + py1 - (px1 * py1)
    ind = sum((v^t1) * pxyus1)
    # Cálculo supondo dependência
    dep = sum(v^t1 * (1 - pMvdc(cbind(x + t1, y + t1), ebiv1)))
    # Razão entre os modelos
    raz = dep/ind
    a_ind1[k,j] = ind
    a_dep1[k,j] = dep
    a_raz1[k,j] = raz
  }
}
round(a_dep1, 4)
round(a_ind1, 4)
round(a_raz1, 4)
##### Cálculo das anuidades - 2º cenário
w2 <- 111 # última idade das tábuas
i <- 0.05 # Taxa de Juros
v <- 1/(1+i)
x <- c(40, 50, 60, 70, 80)
nome_linhas <- c("-10", "-5", "0", "5", "10")
nome_colunas <- c("40", "50", "60", "70", "80")
a_ind2 <- as.data.frame(matrix(nrow = 5, ncol = 5), row.names = nome_linhas)
names(a_ind2) <- nome_colunas
a_dep2 <- a_ind2
a_raz2 <- a_dep2
for(j in 1:ncol(a_ind2)){
  x = as.numeric(names(a_ind2)[j])
  for(k in 1:nrow(a_ind2)){
    y = x + (as.numeric(row.names(a_ind2)[k]))
    t2 = 0:(min(w2 - x, w2 - y))
    # Cálculo supondo independência
    px2 = (1 - pgompertz(x + t2, shape=gomp2_m$res[1], rate=gomp2_m$res[2]))
    py2 = (1 - pgompertz(y + t2, shape=gomp2_f$res[1], rate=gomp2_f$res[2]))
    pxyus2 = px2 + py2 - (px2 * py2)

```

```

ind = sum((v^t2) * pxyus2)
# Cálculo supondo dependência
dep = sum(v^t2 * (1 - pMvdc(cbind(x + t2, y + t2), ebiv2)))
# Razão entre os modelos
raz = dep/ind
a_ind2[k,j] = ind
a_dep2[k,j] = dep
a_raz2[k,j] = raz
}
}
round(a_dep2,4)
round(a_ind2,4)
round(a_raz2,4)
##### Cálculo das anuidades - 3º cenário
w3 <- 111 # última idade das tábuas
i <- 0.05 # Taxa de Juros
v <- 1/(1+i)
x <- c(40, 50, 60, 70, 80)
nome_linhas <- c("-10", "-5", "0", "5", "10")
nome_colunas <- c("40", "50", "60", "70", "80")
a_ind3 <- as.data.frame(matrix(nrow = 5, ncol = 5), row.names = nome_linhas)
names(a_ind3) <- nome_colunas
a_dep3 <- a_ind3
a_raz3 <- a_dep3
for(j in 1:ncol(a_ind3)){
  x = as.numeric(names(a_ind3)[j])
  for(k in 1:nrow(a_ind3)){
    y = x + (as.numeric(row.names(a_ind3)[k]))
    t3 = 0:(min(w3 - x, w3 - y))
    # Cálculo supondo independência
    px3 = (1 - pgompertz(x + t3, shape=gomp3_m$res[1], rate=gomp3_m$res[2]))
    py3 = (1 - pgompertz(y + t3, shape=gomp3_f$res[1], rate=gomp3_f$res[2]))
    pxyus3 = px3 + py3 - (px3 * py3)
    ind = sum((v^t3) * pxyus3)
    # Cálculo supondo dependência
    dep = sum(v^t3 * (1 - pMvdc(cbind(x + t3, y + t3), ebiv3)))
    # Razão entre os modelos
    raz = dep/ind
    a_ind3[k,j] = ind
    a_dep3[k,j] = dep
    a_raz3[k,j] = raz
  }
}
round(a_dep3,4)
round(a_ind3,4)
round(a_raz3,4)

```