



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA (UFPB)
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS (CCSA)
DEPARTAMENTO DE FINANÇAS E CONTABILIDADE (DFC)
CURSO DE GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS ATUARIAIS (CCA)

CARLOS ALBERTO GONÇALO BARBOSA

**ADERÊNCIA DE TÁBUAS DE MORTALIDADE VERSUS AJUSTES DE LEIS DE
MORTALIDADE**

JOÃO PESSOA - PB

2025

CARLOS ALBERTO GONÇALO BARBOSA

**ADERÊNCIA DE TÁBUAS DE MORTALIDADE VERSUS AJUSTES DE LEIS DE
MORTALIDADE**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Ciências Atuariais pela Universidade Federal da Paraíba.

Área de concentração: Premissas atuariais.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Carlos Santos Júnior.

**JOÃO PESSOA
2025**

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

B238a Barbosa, Carlos Alberto Gonçalo.

Aderência de tábuas de mortalidade versus ajustes de leis de mortalidade / Carlos Alberto Gonçalo Barbosa. - João Pessoa, 2025.

83 f. : il.

Orientação: Luiz Carlos Santos Júnior.

TCC (Graduação) - UFPB/CCSA.

1. Tábuas de mortalidade. 2. Modelos paramétricos.
3. Renda atuarial. I. Santos Júnior, Luiz Carlos. II. Título.

UFPB/CCSA

CDU 368

CARLOS ALBERTO GONÇALO BARBOSA

**ADERÊNCIA DE TÁBUAS DE MORTALIDADE VERSUS AJUSTES DE LEIS DE
MORTALIDADE**

Trabalho de Conclusão de Curso como
requisito parcial à obtenção do título de
Bacharel em Ciências Atuariais pela
Universidade Federal da Paraíba.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Luiz Carlos Santos Júnior
Orientador
Universidade Federal da Paraíba (UFPB)

Prof. Bel. Hugo Vieira Sa Ferreira Gomes
Membro Avaliador
Universidade Federal da Paraíba (UFPB)

Profa. Dra. Pamila Cristina Lima Siviero
Membro Avaliador
Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP)

AGRADECIMENTOS

Agradeço, antes de tudo, a Deus, pelas oportunidades, bênçãos e proteção que nunca me faltaram, inclusive nos momentos mais difíceis.

Agradeço à minha mãe, Maria do Rosário, por seu apoio incondicional, por sempre acreditar em mim e me incentivar a perseguir meus sonhos. Ao meu pai, Carlos (*in memoriam*), agradeço por ter me inspirado a amar o conhecimento e por deixar em mim a curiosidade de aprender e ensinar.

Agradeço a toda minha família — em especial, as minhas tias Josélia, Rosele e Eliane, aos meus tios Moisés e Roseilton, as minhas avós Josefa e Tereza, ao meu avô Severino, tia-avó Antônia e primas Thainá, Thais, Márcia, Luciana e Maria de Fátima — por terem me mostrado, desde cedo, o valor da gentileza e do respeito. Aos meus irmãos, Luana e André, agradeço por serem grandes companheiros de jornada e por nunca me fazerem sentir só.

Agradeço a todos que conheci ao longo da graduação, por cada conselho e cada amizade que me fizeram crescer pessoal e profissionalmente. Em especial, agradeço a Cristiane, Margaret, Beatriz e João Pedro, que foram os primeiros que estiveram comigo desde o início dessa fase; e também a Maria Eduarda, Sara, Matheus, Felipe, Walber, Pedro e Fred, que souberam tornar os dias mais leves com conversas bem-humoradas. E agradeço, de forma especial, a Clara, Andressa e ao Fábio, pela amizade e pelos conselhos que me ajudaram a enxergar meus erros, a melhorar como pessoa e evoluir constantemente.

Agradeço aos professores do curso, que tanto contribuíram para minha formação acadêmica e humana. Em especial, agradeço ao professor Luiz, pela orientação nesta pesquisa, por sempre me ouvir com atenção, incentivar minhas ideias e me inspirar a fazer o melhor em cada projeto.

Agradeço à mulher extraordinária que entrou em minha vida este ano, Sophia. Sua presença transformou cada momento, trazendo inspiração, força e significado às minhas conquistas. Esta etapa se torna ainda mais especial graças à sua luz constante em meu caminho. Obrigado, meu amor.

Agradeço, por fim, a cada um de vocês que faz parte da minha história. Sem o incentivo, a parceria e o carinho de cada pessoa mencionada (e até as não mencionadas), esta conquista não seria possível. Vocês são parte fundamental de tudo o que alcancei e que irei alcançar. Muito obrigado!

“Se não puder voar, corra. Se não puder correr, ande. Se não puder andar, rasteje, mas continue em frente de qualquer jeito.”

Martin Luther King Jr.

RESUMO

O estudo analisa o impacto da escolha entre tábuas teóricas, validadas por testes estatísticos, e tábuas ajustadas por leis paramétricas (Gompertz, Makeham e Heligman-Pollard) na precificação de rendas atuariais, utilizando dados das tábuas chilenas B-2006 H e RV-2004. Aplica testes Kolmogorov-Smirnov, qui-quadrado e métricas de erro (MAE, RMSE, R^2) para verificar a aderência dos modelos aos dados observados. Ajusta leis paramétricas às probabilidades de morte por sexo através do método de máxima verossimilhança, selecionando os melhores modelos com base nos critérios AIC e BIC. Compara as rendas atuariais derivadas de ambos os métodos utilizando os testes U de Mann-Whitney e a estatística d de Cohen, avaliando a significância e magnitude dos efeitos. O estudo desenvolve dois cenários, variando temporariedade (n), diferimento (m) e diferença etária entre segurados, mostrando que, embora os testes estatísticos clássicos indiquem diferenças não significativas, os efeitos práticos são substanciais, especialmente em produtos com longo período de diferimento e múltiplas vidas. Conclui-se que a metodologia atuarial escolhida influencia de forma relevante a precificação, sendo os modelos ajustados parametricamente mais eficazes para garantir maior precisão, equidade e sustentabilidade financeira dos produtos atuariais.

Palavras-chave: Tábuas de mortalidade. Modelos paramétricos. Renda atuarial.

ABSTRACT

This study assesses the impact of choosing between theoretical life tables—validated through statistical tests—and tables adjusted by parametric mortality laws (Gompertz, Makeham, and Heligman-Pollard) on the pricing of actuarial annuities, using data from Chilean life tables B-2006 H and RV-2004. It employs Kolmogorov-Smirnov, chi-square tests, and error metrics (MAE, RMSE, R^2) to evaluate model adherence to observed data. Parametric laws are fitted to sex-segmented death probabilities using maximum likelihood estimation, with optimal models selected based on AIC and BIC criteria. Actuarial annuity values from both approaches are compared using Mann-Whitney U tests and Cohen's d statistic to assess significance and practical magnitude. Two scenarios varying temporariness (n), deferment (m), and age differences among insured individuals are analyzed, revealing that, despite statistically non-significant differences according to classical tests, practical effects are substantial, particularly for products with long deferment periods and multiple lives. The study concludes that the selected actuarial methodology significantly influences pricing, with parametric adjusted models providing enhanced accuracy, fairness, and financial sustainability.

Keywords: Mortality tables. Parametric models. Actuarial annuities.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Gráficos comparativos da RA por produto, sexo e status (Cenário 1).....	50
Figura 2 – Gráficos comparativos das estatísticas U e d por produto, sexo e status (Cenário 1).....	51
Figura 3 – Gráficos comparativos da RA por produto, sexo e status (Cenário 2).....	54
Figura 4 – Gráficos comparativos das estatísticas U e d por produto, sexo e status (Cenário 2).....	55

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Informações sobre as variáveis das tábuas de vida (feminino, masculino e total).....	31
Quadro 2 – Máximos p-valores de W por sexo	44
Quadro 3 – As 5 primeiras tábuas aderentes com resultados dos testes por sexo.....	46
Quadro 4 – As 5 primeiras tábuas aderentes com resultados das métricas por sexo	46
Quadro 5 – Resultado dos melhores modelos ajustados pelas métricas por sexo.....	47
Quadro 6 – Informações estatísticas dos valores da RA por produto e sexo (Cenário 1).....	49
Quadro 7 – Informações estatísticas dos valores da RA por produto e sexo (Cenário 2).....	53

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	11
1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO E PROBLEMA	11
1.2 OBJETIVOS	12
1.2.1 Objetivo geral	12
1.2.2 Objetivos específicos	12
1.3 JUSTIFICATIVA	13
2 REFERENCIAL TEÓRICO E EMPÍRICO	15
2.1 TEMPO FUTURO DE VIDA, TÁBUA DE MORTALIDADE E DESCONTO FINANCEIRO	15
2.2 PRÊMIOS E RENDAS ATUARIAIS	20
2.3 METODOLOGIAS PARA A TÁBUA DE MORTALIDADE A SER ADOTADA	24
2.3.1 Testes de aderência de uma tábua de mortalidade	24
2.3.2 Leis de mortalidade	25
2.4 ESTUDOS ANTERIORES	27
3 METODOLOGIA	30
3.1 TIPOS DE PESQUISA	30
3.2 BASE DE DADOS	30
3.3 TIPOS DE ANÁLISE	32
3.3.1 Testes de aderência de tábuas de mortalidade	33
3.3.2 Leis de mortalidade	36
3.3.2.1 <i>Lei de Gompertz</i>	36
3.3.2.2 <i>Lei de Makeham</i>	37
3.3.2.3 <i>Lei de Heligman-Pollard</i>	38
3.3.3 Seleção de modelos	39
3.3.4 Comparação entre rendas calculadas pelas diferentes tábuas	41
4 RESULTADOS	44
4.1 OBTENÇÃO DAS TÁBUAS DE MORTALIDADE	44
4.1.1 Base de dados e verificação de normalidade dos dados	44
4.1.2 Resultados dos testes de aderência	45
4.1.3 Ajustes e seleção das leis de mortalidade	47

4.2 IMPACTO DA TÁBUA ADOTADA SOBRE O CÁLCULO DAS RENDAS ATUARIAIS.....	47
4.3 CONCLUSÃO DOS RESULTADOS.....	56
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	58
REFERÊNCIAS	60
APÊNDICES	64
APÊNDICE A - CÓDIGO.....	65

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO E PROBLEMA

Para a precificação de produtos sobre as vidas – seguros de pessoas e previdência –, os cálculos atuariais são realizados baseados na observação de eventos biométricos, sendo as tábuas biométricas as principais ferramentas constituídas para tal fim.

Por constituir a cobertura básica em um seguro de vida (Viot, 2019), a mortalidade é o evento biométrico mais relevante para o processo de precificação desse produto. A avaliação desse evento pode ser feita por meio de tábuas de mortalidade¹, que podem ser construídas a partir de modelos ajustados ou por meio de uma tábua teórica pré-existente, cuja adequação é verificada por testes de aderência (Wüthrich; Merz, 2022).

As tábuas biométricas são tabelas que apresentam funções que denotam a ocorrência e a não ocorrência de eventos relativos à extensão da vida humana e sua higidez. Dentre os eventos de interesse atuarial no ramo vida, destacam-se a mortalidade geral de indivíduos, a entrada em invalidez, a mortalidade de inválidos e a morbidez.

Tratando-se especificamente da morte, observa-se a sua dinâmica em um grupo de pessoas, em geral, segurados ou participantes consumidores de uma seguradora ou entidade de previdência, e, a partir desses dados realiza-se um teste estatístico de hipóteses para verificar a possibilidade de uso de uma tábua já existente, denominada teórica, que bem explique o comportamento biométrico pretendido, comparando-se os eventos observados com aqueles esperados de acordo com a tábua teórica; alternativamente, constrói-se uma tábua biométrica específica para o grupo em questão, neste caso, uma tábua de mortalidade, por meio de um ajuste paramétrico ou não-paramétrico.

O termo "ajuste paramétrico" refere-se à aplicação de leis de mortalidade que utilizam funções matemáticas para descrever a taxa de mortalidade em diferentes faixas etárias. Essas funções – exemplificadas pelas leis de Gompertz, Makeham e Heligman-Pollard – são modelos matemáticos parametrizados para captar aspectos específicos do comportamento da mortalidade, seja refletindo o crescimento exponencial da taxa de risco com a idade ou a presença de um componente constante que independe da idade, como evidenciado por Dickson, Hardy e Waters (2013) e Bowers *et al.* (1997). De um jeito ou de outro, o atuário estima a informação biométrica e realiza o cálculo do preço do produto sob sua responsabilidade.

¹ Também conhecidas como tabelas ou tábuas de vida, tabelas ou tábuas de morte, tabelas ou tábuas de sobrevivência.

Quando os testes de hipóteses não rejeitam a tábua teórica, ela é adotada devido a sua simplicidade operacional, discricionariedade ou possível falta de dados históricos relevantes, o que reduz o tempo e o custo referentes ao cálculo. No entanto, a construção de uma tábua própria, a partir de um ajuste paramétrico, pode oferecer maior confiabilidade por ser decorrente da efetiva dinâmica biométrica da massa de segurados em questão (Azevedo, 2018).

Logo, tem-se, por um lado, que o uso de uma tábua teórica não rejeitada em teste de hipótese possui, em geral, a vantagem de ser uma metodologia mais simples, barata e rápida; por outro lado, o uso de um ajuste paramétrico para criar uma nova tábua pode viabilizar o uso de uma tábua mais adequada aos dados dos segurados. Assim, a escolha entre utilizar uma tábua teórica ou criar uma tábua por meio de um ajuste paramétrico pode impactar a precificação dos produtos e a sustentabilidade financeira de seguradoras e fundos de pensão (Dickson, Hardy e Waters, 2013).

Em outras palavras, ao contrário da tábua teórica, que realiza testes de aderência para determinar se uma tábua com valores resultantes de experiências passadas é ou não apropriada para a realização dos cálculos atuariais, as leis de mortalidade são modeladas para identificar a distribuição que melhor se ajusta aos dados efetivamente observados.

Nesse contexto, dado que a prática de mercado adota uma tábua teórica (não rejeitada em teste de aderência) em detrimento da construção de uma tábua própria, pergunta-se: **A escolha entre tábuas teóricas e tábuas ajustadas por leis de mortalidade impacta significativamente a precificação de rendas?**

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo geral

Avaliar o impacto da escolha entre tábuas – teóricas, validadas por testes de aderência, e empíricas, ajustadas por leis de mortalidade – sobre a precificação de rendas.

1.2.2 Objetivos específicos

- Constatar, por meio de testes de hipóteses, quais das tábuas de mortalidade teóricas analisadas são consideradas aderentes à massa de segurados em questão;

- Estimar, por meio das leis de mortalidade Gompertz, Makeham e Heligman-Pollard, as tábuas de mortalidade, segmentadas por sexo, com base nos dados observados dos segurados;
- Comparar as rendas precificadas por meio de tábuas teóricas, validadas por testes de aderência, e das tábuas ajustadas por leis de mortalidade.

1.3 JUSTIFICATIVA

O presente trabalho é um produto do projeto de ensino chamado “cálculo atuarial e demografia”, um projeto financiado pela Universidade Federal da Paraíba (UFPB). Seu objetivo geral é aprimorar, em longo prazo, a formação dos alunos do curso de graduação em ciências atuariais. Além disso, dois de seus objetivos específicos são promover a cooperação acadêmica entre discentes e docentes e incentivar e orientar o monitor a desenvolver suas habilidades de ensino e de pesquisa. Neste sentido, este trabalho atende à demanda do projeto.

Embora o estudo não seja pioneiro na comparação entre diferentes tábuas biométricas ou leis de mortalidade, ele se destaca por oferecer uma nova visão sobre a determinação e aderência da premissa atuarial às tábuas biométricas utilizadas no cálculo de produtos atuariais. Sua relevância reside na análise detalhada de como diferentes abordagens metodológicas podem impactar a precificação de seguros e produtos previdenciários.

A magnitude desse impacto dependerá da sensibilidade das seguradoras quanto à escolha entre a tábua teórica ou ajustada - uma seleção inadequada pode expor a instituição a riscos desnecessários, seja sub, seja sobreprecificando o seu produto, o que na prática pode provocar perda de clientes ou risco de insolvência. Nesta linha, a Revista Brasileira de Atuária (2017, p. 18) destaca que o aumento da complexidade das atividades atuariais, aliado à crescente responsabilidade da profissão, vem elevando o nível de exigência das práticas atuariais. Portanto, a escolha adequada da metodologia se torna muito importante, influenciando diretamente a precificação e a solvência das seguradoras e fundos previdenciários.

Assim, o estudo não só contribui para o aprimoramento das práticas atuariais, mas também viabiliza a tomada de decisão bem embasada e eficaz no setor de seguros e previdência. Pois se houver diferença significativa, ademais, objetiva-se verificar qual é a sua magnitude para as empresas do setor.

Através dessa análise, o trabalho busca fornecer uma compreensão mais profunda sobre a influência das metodologias de cálculo na avaliação de produtos atuariais, auxiliando os profissionais e as organizações a escolherem a abordagem mais eficiente para suas necessidades.

Por fim, o trabalho permite a replicação e avaliação da metodologia aqui proposta, além dos resultados obtidos, garantindo que as conclusões possam ser validadas por outros pesquisadores e, assim, reforçar a confiabilidade dos achados.

2 REFERENCIAL TEÓRICO E EMPÍRICO

2.1 TEMPO FUTURO DE VIDA, TÁBUA DE MORTALIDADE E DESCONTO FINANCEIRO

No cálculo atuarial do ramo vida, os atuários analisam informações sobre a vida e a saúde humana, mediante o uso do cálculo atuarial, para aplicar modelos estatísticos que ajudam a prever eventos futuros e a calcular prêmios, reservas e benefícios (Rodrigues, 2012). Esses cálculos são baseados em dados históricos e em eventos biométricos, como a mortalidade, a morbidade, a longevidade e a recuperação, pertinentes para a modelagem de riscos e a precificação de seguros e planos de benefícios (Alba, 1965; Bowers *et al.*, 1997). Dessa forma, as informações sobre esses eventos permitem que os atuários obtenham estimativas de custos futuros, ajustem prêmios e garantam a estabilidade financeira das seguradoras, fundos de pensões e institutos previdenciários (Cordeiro Filho, 2014).

Uma variável aleatória, por sua vez, conforme descrito por Spiegel, Schiller e Srinivasan (2013), é uma função que atribui um valor numérico a cada resultado possível de um experimento aleatório. No cálculo atuarial, o tempo futuro de vida² é a variável aleatória principal, pois representa a duração adicional de vida esperada a partir de um ponto específico no tempo (ou dada uma idade qualquer). Esse conceito é necessário para calcular prêmios e reservas em produtos de seguro de vida e pensões, auxiliando na modelagem do risco associado ao tempo de vida restante dos segurados (Dickson; Hardy; Waters, 2013).

O tempo de vida futuro, representado pela variável aleatória $T(x)$, é um conceito central que auxilia na modelagem dos riscos associados à vida humana. Como discutido anteriormente, T_x descreve o tempo adicional de vida a partir de uma determinada idade, o que é usado para calcular prêmios e reservas em produtos de seguro de vida e pensões.

Através dessa variável, atuários conseguem prever eventos biométricos, como a mortalidade e a longevidade, que são fatores essenciais para a precificação dos seguros e para a definição de benefícios (Dickson; Hardy; Waters, 2013; Spiegel; Schiller; Srinivasan, 2013).

Essa previsão, portanto, oferece a base para o desenvolvimento de tábuas de mortalidade e outros instrumentos cruciais para o cálculo atuarial - ambos a partir do cálculo de algumas probabilidades referentes a T_x , tais quais as funções de densidade de probabilidade, de distribuição acumulada e de sobrevivência.

² Também conhecido como tempo restante de vida, tempo residual de vida, sobrevida.

A função de densidade $f_x(t)$ é exibida na equação (1), e descreve a probabilidade de um indivíduo falecer em um instante t .

$$f_x(t) = \frac{d}{dt} [P(T_x \leq t)], \text{ para } t \geq 0 \quad (1)$$

A função de sobrevivência $S_x(t)$, de acordo com a expressão (2), representa a probabilidade de sobreviver até o tempo t .

$$S_x(t) = P(T_x > t), \text{ para } t \geq 0 \quad (2)$$

Por meio das probabilidades (1) e (2) referentes à variável aleatória T_x , é possível calcular a função biométrica (uma função que modela processos relacionados à morte e à vida) denominada força de mortalidade $\mu_x(t)$, definida em (3).

$$\mu_x(t) = \frac{f_x(t)}{S_x(t)} \quad (3)$$

A equação (3), cuja função é conhecida também como taxa instantânea de mortalidade, é uma taxa que representa o risco de morte, em um pequeno intervalo de tempo e dado que o segurado de idade x sobreviveu até t (Bowers *et al.*, 1997). A força de mortalidade $\mu_x(t)$ permite que os atuários avaliem o risco de morte em momentos específicos (em tempos fracionados), sendo utilizado para a precificação de produtos como seguros de vida e anuidades.

Pires *et al.* (2021, p. 63) afirma que:

A força de mortalidade, $\mu_{(x)}$, está relacionada à intensidade da passagem do estado vivo para o estado morto. Não se trata de uma medida de probabilidade, mas sim, uma medida relativa da mortalidade no momento em que se atinge a idade x .

A função biométrica número de vivos à idade exata x (l_x), comumente utilizada no cálculo de rendas, pode ser calculada de diferentes maneiras, por exemplo, a partir do número de mortos entre as idades x e $x + 1$ (d_x), a partir da função de sobrevivência ou a partir da força de mortalidade, de modo que se mensurem as demais funções biométricas. Essas funções são

organizadas em tábuas de mortalidade, que fornecem uma representação prática dessas probabilidades ao longo de diferentes idades (Rodrigues, 2012) e desempenham um papel fundamental na avaliação de riscos e na determinação de valores atuariais (Bowers *et al.* 1997). Em outros termos, a tábua de mortalidade, uma tabela composta por funções biométricas dispostas por idade, é um dos instrumentos de base para os cálculos de prêmios de seguros, pois possibilita estimar a probabilidade de ocorrência de sinistros e os valores esperados de pagamentos futuros (Preston; Heuveline; Guillot 2001).

Conforme Bowers *et al.* (1997), a relação entre μ_x e l_x pode ser expressa conforme a expressão (4):

$$\frac{dlx}{dx} = -\mu_x \cdot l_x. \quad (4)$$

Isso significa que a variação do número de vivos em relação à idade x é proporcional à força de mortalidade, e o sinal negativo reflete a diminuição da sobrevivência à medida que a mortalidade age sobre a população.

A partir da equação (4), é possível determinar l_x em termos de μ_x . Reorganizando-se as variáveis, tem-se (5):

$$\frac{dlx}{l_x} = -\mu_x \cdot dx. \quad (5)$$

Ainda, integrando-se ambos os lados em (5), obtém-se (6):

$$\int_{l_0}^{l_x} \frac{1}{lu} dl_u = - \int_0^x \mu_u \cdot du. \quad (6)$$

A integral à esquerda resulta em $\ln(l_x) - \ln(l_0)$; e à direita, a integral da força de mortalidade μ_x sobre o intervalo de 0 até x . Isso resulta na equação (7):

$$\ln(l_x) = \ln(l_0) - \int_0^x \mu_u \cdot du. \quad (7)$$

Em seguida, aplicando-se a exponenciação em ambos os lados da equação (7), obtém-se (8):

$$l_x = l_0 \cdot e^{-\int_0^x \mu_u \cdot du}. \quad (8)$$

Se μ_x for constante, por exemplo, $\mu_x = c$, a equação (8) é simplificada para o formato exibido em (9):

$$l_x = l_0 \cdot e^{-cx}. \quad (9)$$

Isso significa que se a força de mortalidade for constante ao longo da vida, a função de sobrevivência l_x decresce exponencialmente com a idade x .

Quando μ_x não é constante e varia com a idade, é necessário conhecer a função μ_x ou $S_x(t)$ para calcular l_x . Nesse caso, dependendo da forma de μ_x , pode-se obter expressões diferentes para l_x , mas o princípio permanece o mesmo: em linhas gerais, l_x decresce de acordo com a intensidade de μ_x acumulada ao longo do tempo. Portanto, é possível extrair o valor de l_x por meio de manipulações algébricas de cada uma dessas fórmulas, permitindo que a tábua seja construída a partir de l_x .

A escolha de uma tábua adequada ao perfil estatístico da população observada é essencial para garantir a correta precificação e a mitigação de riscos nos fundos de pensão (Rodrigues, 2012). Tábuas de mortalidade são utilizadas para aumentar a precisão na precificação dos seguros ao refletir as mudanças demográficas no mercado segurador brasileiro (Oliveira *et al.*, 2023).

Com base nessas informações, é possível ajustar os prêmios de acordo com o perfil de risco do grupo segurado, fator relevante para a sustentabilidade de qualquer fundo de pensão ou seguro de vida. O uso adequado da tábua de vida permite que os prêmios sejam adequadamente ajustados, não apenas ao risco geral, mas às características específicas do grupo, o que reduz a probabilidade de desvios financeiros inesperados. Isso contribui para uma gestão de riscos eficiente, mitigando potenciais perdas para a seguradora (Dickson; Hardy; Waters, 2013). Dessa forma, a aplicação de tábuas de mortalidade se estende a diferentes produtos do mercado segurador, incluindo rendas, que podem ser individuais, para múltiplas vidas, reversíveis ou ajustadas, conforme o status do segurado (Bravo, 2007).

Quando os dados são apresentados em termos de l_x , a partir de uma coorte inicial l_0 (geralmente uma quantidade arbitrária), eles descrevem diretamente o número de indivíduos que permanecem vivos em uma determinada idade x , de acordo com Dickson, Hardy e Waters (2013). A vantagem de ter dados nessa forma é que se pode calcular facilmente todas as outras funções biométricas, como o número de mortes entre as idades x e $x + n$ (${}_n d_x$), a probabilidade de morte entre as idades x e $x + n$ (${}_n q_x$) e probabilidade de sobrevivência entre as idades x e $x + n$ (${}_n p_x$), por exemplo. Se temos l_x e l_{x+1} , dado que $n = 1$, podemos calcular essas três funções biométricas conforme as expressões (10), (11) e (12):

$$d_x = l_x - l_{x+1}, \quad (10)$$

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}, \quad (11)$$

$$p_x = 1 - q_x. \quad (12)$$

Assim, para criar tábuas de mortalidade, utilizam-se dados históricos sobre a mortalidade e a sobrevivência provenientes de seguradoras ou censos populacionais (Azevedo, 2018). A construção dessas tábuas pode ser feita através da análise de históricos de mortalidade ou por meio de modelagens estatísticas baseadas em leis de mortalidade, como será visto no próximo tópico, garantindo assim a acurácia nas previsões e na precificação atuarial.

Dada a apresentação das funções biométricas, exibe-se, a seguir, o cálculo do fator de desconto financeiro, conforme mencionado por Pires *et al.* (2021), que reflete a necessidade de ajustar os fluxos de caixa futuros, ao valor presente, dada uma taxa de juros i . A equação (13) representa o fator de desconto financeiro:

$$v = \frac{1}{1 + i}. \quad (13)$$

O fator de desconto é especialmente útil para determinar as anuidades, onde o atuário necessita trazer todos os pagamentos futuros a valor presente considerando a taxa de juros.

Destaca-se que a tábua de mortalidade e o fator de desconto financeiro são necessários para os cálculos das anuidades, funções necessárias para o posterior cálculo dos prêmios referentes às rendas.

2.2 PRÊMIOS E RENDAS ATUARIAIS

Antes de apresentar como se chega nos valores de cada anuidade, é necessário saber o que é um prêmio. O prêmio é o valor pago pelo segurado à seguradora pela cobertura dos riscos contratados, calculado com base em parâmetros como a tábua de mortalidade (ver Seção 2.1). O prêmio pode ser classificado quanto ao carregamento e à forma de pagamento, conforme a estrutura do contrato e o momento de pagamento.

Quanto ao carregamento, o prêmio pode ser puro ou comercial. O prêmio puro considera apenas os riscos cobertos e o valor esperado de sinistros, sem incluir custos administrativos ou margens de lucro da seguradora. Esse tipo de prêmio serve como base para o cálculo do valor final que será cobrado ao segurado. Já o prêmio comercial, além de cobrir os riscos, inclui também os custos administrativos e outras despesas operacionais da seguradora. Este é o valor efetivamente pago pelo segurado, e pode ser influenciado por fatores externos, como a inflação e as variações das despesas da empresa (Bowers *et al.*, 1997).

Ademais, o prêmio pode ser classificado quanto à forma de pagamento, sendo único ou periódico. O prêmio único é pago integralmente no momento da contratação. Já o prêmio periódico, por outro lado, é parcelado ao longo da duração do contrato. A escolha entre essas modalidades depende das condições do segurado e do tipo de contrato, sendo o prêmio periódico mais comum em seguros de vida tradicionais, enquanto o prêmio único é mais utilizado em anuidades e produtos financeiros com maior enfoque em investimento (Dickson; Hardy; Waters, 2013).

Como os prêmios das rendas são calculados a partir das anuidades, apresentam-se, em seguida, as suas características gerais.

As anuidades são calculadas com base nos descontos financeiros e nas informações extraídas das tábuas de mortalidade, como o número de sobreviventes e as probabilidades de morte e de sobrevivência, comumente escritas em função de l_x .

Esses dados são o alicerce para o cálculo atuarial dos fatores de valor presente atuariais, as anuidades, além dos prêmios, conforme discutido por Bowers *et al.* (1997), que detalham o uso dessas tábuas na precificação de produtos de seguro. Isso significa que as anuidades representam o valor presente atuarial de uma série de pagamentos iguais a uma unidade de capital, realizados no início ou final de cada período pelo tempo em que a pessoa de idade x estiver dentro das exigências do contrato.

Existem diferentes tipos de anuidades, cada uma com finalidades específicas e de acordo com a necessidade do cliente. As anuidades são baseadas na sobrevivência de uma única pessoa ou podem levar em consideração a sobrevivência combinada de duas ou mais pessoas (múltiplas vidas), geralmente em contextos de relações conjugais ou parcerias. As anuidades para múltiplas vidas, por sua vez, são estruturadas baseadas em condições como a sobrevivência conjunta de parceiros ou o falecimento do último sobrevivente (Ferreira, 2019; Pires *et al.*, 2021).

As anuidades podem ser classificadas quanto ao início da cobertura, isto é, se há ou não diferimento; quanto ao término da cobertura, se há ou não temporariedade; se o pagamento da seguradora é realizado no início (antecipação) ou no fim (postecipação) dos períodos; quanto ao número de pagamentos a serem realizados pela seguradora ao longo de um ano; quanto à constância do valor a ser pago pela seguradora.

Assim, as anuidades podem ser antecipadas (representadas por \ddot{a}_x), com pagamentos realizados no início do período, ou postecipadas (representadas por a_x), quando os pagamentos ocorrem ao final do período. Além disso, quanto ao início do pagamento, as anuidades são imediatas quando o pagamento se inicia na data de contratação do produto, ou diferidas (representada por ${}_m|\ddot{a}_x$ ou ${}_m|a_x$), quando o pagamento se inicia após m anos (a carência). Quanto ao fim do pagamento, elas também podem ser vitalícias, com pagamentos até a morte do beneficiário, a qualquer tempo, ou temporárias (representadas por $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ ou $a_{x:\overline{n}|}$), situação em que os pagamentos se encerram após n anos. Os pagamentos podem ser constantes, em termos nominais, ou dinâmicos, quando variam ao longo do tempo (Ferreira, 2019).

As anuidades para uma vida podem ser expressas pela fórmula:

$${}_m|\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=m}^{m+n-1} {}_t p_x \cdot v^t. \quad (14)$$

O limite inferior do somatório é determinado pelo início da cobertura. Quando esta for imediata, tem-se $t = 0$ (se antecipada) e $t = 1$ (se postecipada); se houver diferimento m , tem-se $t = m$ (se antecipada) e $t = m + 1$ (se postecipada).

Já o limite superior é determinado pelo fim da cobertura, ou seja, quando a cobertura for vitalícia, tem-se $t = \omega - x$ (se antecipada ou postecipada); se houver temporariedade, porém sem diferimento, tem-se $n - 1$ (se antecipada) e n (se postecipada); por fim, se houver temporariedade e diferimento, tem-se $m + n - 1$ (se antecipada) e $m + n$ (se postecipada).

Também há a possibilidade de contratar a renda para mais de uma vida, ou seja, de em um mesmo contrato existirem dois ou mais segurados. Sendo x e y dois indivíduos com características distintas, apresentam-se dois tipos de *status*: vida conjunta, onde só haverá cobertura enquanto ambos sobrevivem; e último sobrevivente, caso em que há cobertura enquanto ao menos um deles sobreviver, desde que dentro do período de cobertura.

O número de vivos sob o status de vida conjunta (l_{xy}), representa o produto entre o número de vivos com a idade x e o número de vivos com a idade y .

$$l_{xy} = l_x \cdot l_y \quad (15)$$

Essa fórmula é válida sob a suposição de que as probabilidades de sobrevivência de x e y são independentes. Quando há dependência de sobrevivência outras metodologias devem ser aplicadas para calcular l_{xy} (Bowers *et al.*, 1997; Dickson; Hardy; Waters, 2013).

Assim, com o l_{xy} , a probabilidade de sobrevivência de vida conjunta (${}_t p_{xy}$) é o produto das probabilidades individuais de sobrevivência de cada segurado. Isso indica a chance de ambos os segurados estarem vivos após n anos. Essa probabilidade decresce com o tempo e os pagamentos cessam quando o primeiro segurado falece.

$${}_t p_{xy} = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+n}}{l_y} = {}_t p_x \cdot {}_t p_y \quad (16)$$

A anuidade para o status de vida conjunta é representada por \ddot{a}_{xy} . Trata-se do valor presente atuarial de uma série de pagamentos unitários realizados no início de cada período enquanto ambas as vidas x e y estiverem vivas. As características de diferimento, temporariedade e fracionamento também se aplicam a essa anuidade. Essa anuidade reflete a situação de dois indivíduos e os pagamentos cessam na primeira morte, tornando-se uma ferramenta indispensável para a precificação de anuidades para casais ou parcerias (Bravo, 2007).

Essas parcerias podem assumir diferentes contextos, sendo eles: comerciais, como entre sócios ou fundadores de uma empresa que desejam garantir suporte financeiro ao segurado; familiares, envolvendo relações intergeracionais ou colaterais, como pais, filhos, tios ou irmãos; e informais, fora do contexto social ou familiar tradicional, como parcerias de apoio mútuo

entre amigos ou cuidadores (Bravo, 2007; Dickson; Hardy; Waters, 2013). Sua fórmula é expressa por:

$${}_m|\ddot{a}_{xy:\bar{n}}| = \sum_{t=m}^{m+n-1} {}_t p_{xy} \cdot v^t \quad (17)$$

A variável $l_{\overline{xy}}$ indica o número de sobreviventes sob o status do último sobrevivente, sendo a soma dos números de vivos às idades x e y menos o número de vivos sob o status de vida conjunta.

$$l_{\overline{xy}} = l_x + l_y - l_{xy} \quad (18)$$

A probabilidade de sobrevivência ${}_n p_{\overline{xy}}$ reflete a chance de pelo menos um dos segurados sobreviver durante n anos. Como pelo menos um deles precisa estar vivo para que os pagamentos continuem, essa probabilidade permanece alta até que ambos os segurados tenham falecido.

$${}_n p_{\overline{xy}} = {}_n p_x + {}_n p_y - {}_n p_{xy} \quad (19)$$

$${}_n p_{\overline{xy}} \frac{l_{x+n}}{l_x} + \frac{l_{y+n}}{l_y} - \left(\frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+n}}{l_y} \right) \quad (20)$$

A anuidade de último sobrevivente, representada por $\ddot{a}_{\overline{xy}}$, é o valor presente atuarial de uma série de pagamentos unitários, pagáveis no início de cada período enquanto qualquer um dos indivíduos x ou y estiver vivo. A interpretação e as outras características como diferimento, temporariedade e fracionamento também se aplicam à essa anuidade. Os pagamentos continuam até a última morte, garantindo a renda até que ambos faleçam. A fórmula da anuidade para o status de último sobrevivente é dada por

$${}_m|\ddot{a}_{\overline{xy}:\bar{n}}| = \sum_{t=m}^{m+n-1} {}_t p_{\overline{xy}} \cdot v^t. \quad (21)$$

Esses valores correspondem ao Prêmio Único e Puro (PUP), já mencionado no início da seção. O próximo tópico tem como objetivo explicar quais as formas de obtenção da tábua de mortalidade, utilizada em conjunto com os fatores de desconto financeiro para calcular o prêmio.

2.3 METODOLOGIAS PARA A TÁBUA DE MORTALIDADE A SER ADOTADA

Para formular modelos atuariais, busca-se tábuas de mortalidade com base na coleta e análise de dados demográficos, como censos e registros de óbito. Beltrão *et al.* (2004) e Oliveira *et al.* (2023) discutem metodologias para garantir a consistência da estimativa desses dados, destacando a importância de técnicas estatísticas que determinam as probabilidades de morte e de sobrevivência em diferentes idades

Hogg, McKean e Craig (2020) apontam dois métodos principais: o ajuste por leis de mortalidade, com modelos matemáticos, e os testes de aderência, que comparam dados observados com tábuas teóricas. A confiabilidade dessas tábuas, portanto, depende de metodologias adequadas, que garantem a precisão na gestão de riscos de longo prazo.

2.3.1 Testes de aderência de uma tábua de mortalidade

Na visão de Wüthrich e Merz (2022), os testes de hipóteses desempenham um papel crucial na estatística atuarial, ao permitirem que os atuários verifiquem a validade de suposições sobre parâmetros populacionais com base em dados amostrais. A formulação utiliza hipóteses e a escolha adequada dos métodos estatísticos, etapas fundamentais para a execução eficaz desses testes. Além disso, Hogg, McKean e Craig (2020) destacam que, no contexto da estatística inferencial, os testes de hipóteses são procedimentos centrais para avaliar a veracidade de uma afirmação sobre uma população com base em amostras.

O processo envolve a formulação de uma hipótese nula e de uma hipótese alternativa, além do uso de métodos estatísticos para calcular a probabilidade de se obter os dados observados – ou algo mais extremo – caso a hipótese nula seja verdadeira. A decisão de rejeitar ou não a hipótese nula é baseada na comparação entre o valor-p e o nível de significância estabelecido. Dessa forma, tanto na estatística atuarial quanto na inferencial, a aplicação correta dos testes de hipóteses é um processo rigoroso e estruturado, essencial para garantir a validade das conclusões.

Esses conceitos, quando aplicados ao campo da atuária, são utilizados para comparar o comportamento das mortes observadas com o histórico de mortalidade passado, com base em tábuas previamente consolidadas.

Santos Júnior, Azevedo e Tsunemi (2019) reforçam a relevância dos testes de aderência para validar a precisão das tábuas de mortalidade, comparando os resultados de modelos preditivos com os dados reais de mortalidade. Já Oliveira *et al.* (2023) discutem a aplicação de métodos estatísticos para testar a aderência dessas tábuas às observações empíricas, enfatizando a necessidade de ajustes contínuos para manter a consistência dos modelos.

Portanto, os testes de aderência verificam se os dados observados se ajustam adequadamente ao modelo teórico proposto, garantindo, assim, a confiabilidade das previsões atuariais (Cordeiro Filho, 2014). Uma vez que as tábuas estão aderentes aos dados reais, elas podem ser utilizadas com maior confiança para a realização de cálculos atuariais mais fiel à realidade.

Essa aderência contínua entre os modelos teóricos e os dados empíricos assegura que os cálculos de risco, baseados nessas tábuas, reflitam a realidade demográfica, possibilitando uma gestão de riscos mais eficaz.

2.3.2 Leis de mortalidade

As leis de mortalidade descrevem como a taxa de morte varia com a idade, sendo amplamente utilizadas na construção de tábuas biométricas e na modelagem de riscos em seguros e previdência. Desde o século XIX, essas formulações evoluíram para refletir os padrões demográficos de diferentes populações, fornecendo bases robustas para previsões atuariais mais precisas (Bowers *et al.*, 1997; Dickson; Hardy; Waters, 2013).

A Lei de Gompertz, proposta por Benjamin Gompertz em 1825, foi uma das primeiras a relacionar a mortalidade diretamente ao processo de envelhecimento humano. Esse modelo descreve a mortalidade como uma função que aumenta exponencialmente com a idade, refletindo a degeneração biológica. Sua simplicidade e eficácia fizeram dela uma ferramenta amplamente utilizada para modelar a mortalidade onde o envelhecimento é o principal fator determinante da taxa de mortalidade (Bravo, 2007).

A Lei de Makeham, introduzida por William Makeham em 1860, aprimorou a Lei de Gompertz ao incluir um componente adicional para modelar fatores independentes da idade, como acidentes e doenças externas ao processo de envelhecimento. Esse modelo é utilizado para descrever a mortalidade em idades adultas, sendo mais apropriado para o intervalo entre

30 e 80 anos, onde o envelhecimento e fatores externos têm grande impacto na mortalidade (Lauretto, 2008).

Por outro lado, o modelo de Heligman-Pollard, desenvolvido em 1980, oferece uma abordagem mais abrangente e complexa, ao dividir a mortalidade em três componentes principais: mortalidade infantil, mortalidade associada à juventude (ou acidental), e mortalidade senil, dominada pelo processo de envelhecimento. A flexibilidade do modelo o torna adequado para populações heterogêneas e análises detalhadas em múltiplas faixas etárias (Bowers *et al.*, 1997).

As diferentes versões da Lei de Heligman-Pollard surgiram como uma resposta à necessidade de aprimorar sua aplicação em cenários populacionais distintos e em constante evolução. Segundo Bravo (2007), a versão clássica da lei, desenvolvida originalmente por Heligman e Pollard em 1980, tornou-se uma referência por sua capacidade de descrever padrões de mortalidade ao longo das diferentes fases da vida, segmentando-os em três componentes principais: mortalidade infantil, mortalidade por causas acidentais na juventude e mortalidade senil.

Para garantir maior aderência às características específicas de cada população, foram criadas variações adicionais da Lei de Heligman-Pollard. As versões A e B dessa lei foram desenvolvidas para aprimorar a calibração do modelo clássico diante de realidades populacionais distintas. A versão A buscou melhorar o ajuste da mortalidade juvenil e senil em populações específicas. Já a versão B introduziu parâmetros mais sensíveis às variações demográficas, facilitando sua aplicação em contextos como o brasileiro, onde há transições epidemiológicas acentuadas (Bravo, 2007).

Além dessas, há ainda a Segunda e a Terceira Leis de Heligman-Pollard, que se diferenciam do modelo original principalmente no tratamento da mortalidade em idades avançadas. Na Segunda Lei, por exemplo, um dos parâmetros permite ajustes negativos, oferecendo maior sensibilidade às mudanças na longevidade. A Terceira Lei, por sua vez, propõe modificações estruturais que ampliam a flexibilidade do modelo, embora possam reduzir parte da clareza demográfica na interpretação dos parâmetros.

Conforme apontado por Oliveira *et al.* (2023), a evolução das condições de saúde e os avanços na medicina exigem revisões periódicas das tábuas de mortalidade para garantir maior acurácia nas previsões atuariais. Já Santos Júnior, Azevedo e Tsunemi (2019) mostram como essas leis influenciam os modelos preditivos usados em seguros e previdência, destacando que a escolha adequada da lei de mortalidade pode impactar significativamente o cálculo atuarial.

A diversidade de leis de mortalidade reflete o progresso contínuo da ciência atuarial e da demografia ao longo do tempo, à medida que pesquisadores desenvolvem modelos que atendam às necessidades de análise de diferentes populações e períodos históricos. Desde a formulação das leis clássicas até os avanços recentes em modelos estocásticos e dinâmicos, observa-se uma evolução que busca aprimorar a representação dos padrões de mortalidade.

As leis clássicas, como a Lei de Makeham, representam um marco inicial chave, proporcionando modelos matemáticos relativamente simples para descrever os padrões de mortalidade em populações humanas. Com seu foco em idades intermediárias e adultas, a Lei de Makeham combina um componente relacionado ao envelhecimento com outro independentemente da idade, permitindo que fatores externos, como acidentes, sejam incorporados às análises (Lauretto, 2008).

Em resposta a essas demandas, modelos estocásticos como Lee-Carter e Cairns-Blake-Dowd (CBD) foram desenvolvidos para atender às exigências de projeções mais dinâmicas e sensíveis às mudanças temporais. O modelo Lee-Carter, por exemplo, introduziu uma abordagem paramétrica que separa os efeitos do tempo e da idade, sendo amplamente utilizado em estudos que analisam tendências de longo prazo na mortalidade. Já o modelo CBD, com foco em idades avançadas, oferece uma abordagem alternativa, capturando variações específicas na longevidade, algo necessário em análises voltadas ao envelhecimento populacional e seus impactos econômicos (Lee; Carter, 1992; Cairns; Blake; Dowd, 2006).

Produtos financeiros e previdenciários dependem diretamente da adequação dos modelos utilizados para calcular a mortalidade e a longevidade. Modelos desatualizados podem comprometer projeções, gerando impactos significativos sobre a precificação de produtos e a solvência de seguradoras e sistemas de pensões (Bravo, 2007).

A evolução dos modelos de mortalidade destaca a importância de alinhar os avanços metodológicos com as necessidades sociais, econômicas e tecnológicas. A diversidade de leis reflete não apenas o progresso técnico, mas também um esforço contínuo para compreender as dinâmicas que moldam os padrões de mortalidade.

As leis de mortalidade ainda sofrem limitações, como a confiabilidade dos dados e estatísticas e o comportamento de mortes que pode ser influenciada devido grupos populacionais, como gênero, etnia, classe social, hábitos de vida e acesso à saúde.

2.4 ESTUDOS ANTERIORES

Os estudos sobre tábuas de mortalidade têm explorado diferentes abordagens para a sua obtenção, por meio de tábuas teóricas e por meio de estimação de leis de mortalidade ajustadas, e contextos aplicados para a construção de modelos mais precisos e sustentáveis em produtos atuariais. Além disso, pesquisas recentes ressaltam a importância de incorporar fatores socioeconômicos, históricos e geracionais na modelagem da mortalidade, contribuindo para a melhoria da acurácia dos modelos atuariais (Bilal *et al.*, 2021; Queiroz; Gonzaga; Lima, 2013).

Em um estudo mais voltado para o contexto brasileiro, Dias (2014) analisou a mortalidade dos beneficiários do plano de saúde Pró-Saúde. O objetivo foi comparar a aderência das tábuas de mortalidade AT-83 e AT-2000 ao perfil populacional dos segurados do plano. Sua pesquisa, realizada em um contexto de saúde suplementar, revelou que a tábua AT-83 era mais adequada para o perfil masculino, enquanto a AT-2000 ajustava-se melhor ao perfil feminino. Os resultados apontaram que o uso de tábuas de mortalidade desatualizadas pode levar à super ou subprecificação dos produtos atuariais, comprometendo a sustentabilidade financeira das seguradoras. O presente estudo segue essa linha, ao comparar tábuas teóricas e ajustadas para avaliar qual metodologia oferece maior precisão na precificação de rendas atuariais.

Em outra pesquisa, McCarthy e Mitchell (2000) realizaram uma análise comparativa em três países com diferentes perfis demográficos — Estados Unidos, Reino Unido e Austrália — para avaliar como as suposições de mortalidade impactam a precificação de anuidades. O estudo foi conduzido utilizando dados de mortalidade nacionais e tábuas atuariais aplicadas nos respectivos mercados. Seus resultados demonstraram que países com maior expectativa de vida, como o Reino Unido, tendem a subestimar os riscos de longevidade quando utilizam tábuas desatualizadas. Esse achado é crucial, pois indica que variações nas suposições de mortalidade podem gerar grandes discrepâncias no valor das anuidades, especialmente em mercados onde a longevidade está aumentando rapidamente. Além disso, indicou que ajustes periódicos nas tábuas são eficientes para mitigar riscos. Essa pesquisa serve de base comparativa para o presente trabalho, que busca verificar se leis de mortalidade são eficazes em mitigar desvios na precificação de rendas.

Bravo (2007) conduziu uma análise aprofundada que, dentre outras coisas, comparou tábuas tradicionais com modelos estocásticos de mortalidade aplicados ao mercado de seguros e pensões de Portugal. Seu estudo teve como foco o impacto das incertezas sobre a longevidade no cálculo de benefícios futuros. Utilizou, para isso, um modelo estocástico que considerava variações anuais nas taxas de mortalidade e comparou seus resultados com as tábuas de

mortalidade fixas aplicadas tradicionalmente no mercado. Os resultados indicaram que os modelos estocásticos proporcionam previsões mais acuradas e são capazes de ajustar-se às mudanças demográficas, minimizando os riscos de subprecificação dos produtos atuariais.

Em uma aplicação focada nas projeções de longo prazo, Mosher (2022) estudou a necessidade de tábuas prospectivas para a durabilidade dos sistemas previdenciários em economias desenvolvidas. Seu estudo foi realizado na Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), envolvendo a análise de dados demográficos e projeções de mortalidade futura para vários países membros. O foco estava em como a incorporação de melhorias nas expectativas de vida pode evitar subestimações no cálculo dos benefícios de aposentadoria. Mosher concluiu que tábuas estáticas, que não consideram projeções futuras, comprometem a autossuficiência dos sistemas previdenciários a longo prazo. Embora seu estudo não tenha envolvido diretamente comparações de resultados práticos de tábuas ajustadas, ele reforça a importância de constantemente revisar e ajustar as tábuas de mortalidade, fornecendo uma base conceitual que complementa os estudos mais empíricos de outros autores.

Em estudos metodológicos recentes ampliam essa discussão. Cui (2008) propõe uma nova abordagem para a precificação do risco de longevidade, enfatizando que a escolha do modelo de ajuste impacta significativamente o equilíbrio financeira dos produtos de seguros e previdência. Nesse sentido, Brouhns, Denuit e Vermunt (2002) apresentaram uma metodologia baseada em regressão log-bilinear de Poisson, evidenciando a relevância de métodos estatísticos robustos na projeção de tábuas de vida. Em complemento, Boateng, Omari-Sasu e Boateng (2024) destacam, em sua revisão sistemática, que incorporar efeitos de coorte nos modelos estocásticos para capturar variações geracionais, aprimoram a acurácia das projeções, especialmente para a população idosa.

Assim, o presente estudo visa ampliar os achados de autores como Dias (2014), McCarthy e Mitchell (2000), Bravo (2007) e Mosher (2022), integrando ainda as contribuições de Cui (2008), Brouhns, Denuit e Vermunt (2002), Boateng, Omari-Sasu e Boateng (2024), Bilal *et al.* (2021) e Queiroz, Gonzaga e Lima (2013), ao comparar, no âmbito do mercado nacional, as tábuas oriundas de tábuas teóricas e aquelas decorrentes de estimativas de leis de mortalidade ajustadas. Ao adotar uma abordagem empírica, o estudo pretende contribuir para a literatura ao oferecer visões mais práticas sobre o impacto das diferentes metodologias para obtenção da tábua sobre a precificação atuarial de rendas.

3 METODOLOGIA

Neste capítulo, detalha-se o percurso metodológico adotado para alcançar os objetivos propostos neste estudo. Assim, o capítulo apresenta cinco dimensões principais da metodologia: a) a definição do tipo de pesquisa, caracterizando seu enfoque e abordagem; b) o processo de coleta e o tratamento dos dados, garantindo a confiabilidade das informações analisadas; c) a aplicação dos testes de aderência, fundamentais para avaliar a adequação das tábuas de mortalidade teóricas à realidade observada; d) o ajuste e a calibração dos modelos de mortalidade paramétricos; e e) a comparação entre os resultados das tábuas teóricas e das leis ajustadas, permitindo uma análise aprofundada da aderência e precisão dos modelos.

Todas as análises e simulações foram conduzidas utilizando o *software* estatístico R, fornecendo as ferramentas necessárias para a execução das técnicas estatísticas e ajustes nos modelos de mortalidade.

3.1 TIPOS DE PESQUISA

Quanto à abordagem, esta é uma pesquisa quantitativa, envolvendo a análise de dados numéricos para identificar padrões e prever eventos futuros referentes à dinâmica de morte e o seu impacto sobre o cálculo de rendas.

Quanto à natureza, é aplicada, com foco na aplicação das teorias (testes de hipóteses e leis de mortalidade) para uma intervenção de qualidade na realidade (precificação de produtos securitários e previdenciários).

Em relação aos objetivos, a pesquisa adota uma abordagem descritiva e inferencial, focando na coleta e análise detalhada de informações para descrever os dados observados e realizar testes estatísticos que permitam comparar os resultados obtidos de forma rigorosa.

Quanto aos procedimentos, são realizadas simulações de dados com a intenção de avaliar o impacto de diferentes metodologias sobre a precificação de produtos atuariais, o que contribui para a formulação de estratégias que mitiguem riscos.

A delimitação temporal é de perspectiva longitudinal, essencial para monitorar mudanças ao longo do tempo. Esse enfoque permite examinar como fatores como o tempo (ou o período) afeta o risco de morte ao longo das idades e do passar dos anos de 2012 até 2020.

3.2 BASE DE DADOS

Os dados utilizados para a realização dos cálculos atuariais deste estudo foram extraídos do *Human Mortality Database* (HMD), com foco exclusivo nas informações referente ao Chile. Essa escolha fundamenta-se na alta qualidade, consistência e confiabilidade dos registros vitais chilenos, que fornecem dados detalhados sobre mortalidade por idade e sexo – elementos indispensáveis para análises demográficas e atuariais (Human Mortality Database, s.d.).

O HMD disponibiliza as tábuas de mortalidade próprias segmentadas por grupos, aos quais foram consideradas as informações das tábuas de vida organizadas conforme apresentado no Quadro 1.

Quadro 1 – Informações sobre as variáveis das tábuas de vida (feminino, masculino e total)

Variável	Descrição	Tipo
Ano	Ano isolado ou intervalo de anos para dados de período e coorte (1992–2020).	Discreta
Idade	Faixa etária para intervalo de n anos, de x a $x+n$.	Discreta
$m(x)$	Taxa central de mortalidade entre as idades x e $x+n$.	Contínua
$q(x)$	Probabilidade de morte entre as idades x e $x+n$.	Contínua
$a(x)$	Média, em anos, de tempo vivido pelos que morrem no intervalo $x-x+n$.	Contínua
$l(x)$	Número de sobreviventes em idade exata x .	Discreta
$d(x)$	Número de óbitos no intervalo $x-x+n$.	Discreta
$L(x)$	Anos-pessoa vividos no intervalo $x-x+n$.	Contínua
$T(x)$	Anos-pessoa remanescentes após a idade exata x .	Contínua
$e(x)$	Expectativa de vida na idade exata x (em anos).	Contínua

Fonte: Elaboração Própria, com base nas tábuas de vida do Chile disponibilizado pelo HMD (2025).

Para fins de alcançar o objetivo do estudo, não são utilizadas as tábuas próprias descritas acima, apenas as informações de ano, idade e q_x , como sendo os dados históricos de uma instituição de seguros ou previdência.

A robustez dos dados chilenos deve-se, em grande parte, à utilização de fontes oficiais, como o Departamento de Estatísticas e Informações de Saúde (DEIS) e o Instituto Nacional de Estatísticas (INE) (Human Mortality Database, s.d.). Esses órgãos asseguram registros precisos, apresentando baixa subnotificação de nascimentos – índices inferiores a 5,4% – e elevada certificação médica dos óbitos – superiores a 90%.

No tratamento dos dados para este estudo, optou-se por delimitar o período de 2012 a 2020 da base de dados original de modo a assegurar a coerência e a plausibilidade estatística dos registros possibilitando a identificação de tendências e variações na estrutura de mortalidade ao longo dos anos.

Limitações, como a subnotificação ocorrida no censo de 2012 – com índices superiores a 9% –, foram mitigadas mediante a realização de um novo censo em 2017. Outros desafios, como o fenômeno do arredondamento etário (*heaping*) em faixas mais avançadas, foram

superados por meio de rigorosos procedimentos metodológicos e validações estatísticas (Human Mortality Database, s.d.).

Na próxima subseção, apresentam-se os métodos aplicados à elaboração e ao ajuste das tábuas.

3.3 TIPOS DE ANÁLISE

Nesta seção, apresenta-se a análise estatística inferencial que identificará a tábua de mortalidade que melhor corresponde aos dados observados. O propósito é representar, de maneira mais precisa, a evolução das probabilidades de morte e o consequente impacto financeiro na precificação de rendas atuariais. Para tanto, a análise está organizada em quatro etapas interdependentes: (i) verificação da aderência das tábuas de mortalidade, (ii) apresentação das leis de mortalidade, (iii) seleção do modelo mais adequado e (iv) comparação das rendas atuariais derivadas das diferentes modelagens.

Na subseção 3.3.1 apresentam-se os testes que verificarão o quão próximos os modelos teóricos estão dos dados empíricos. Esse processo inclui: (a) a checagem do pressuposto estatístico de normalidade; (b) o uso de testes de aderência não paramétricos; e (c) a utilização de medidas de erro que quantifiquem a acurácia dos ajustes.

Na subseção 3.3.2 serão apresentadas as principais funções matemáticas que descrevem a variação da mortalidade ao longo da idade. Três leis atuariais tradicionais são abordadas:

- Lei de Gompertz, que considera o crescimento exponencial da mortalidade;
- Lei de Makeham, que adiciona um componente constante ao modelo de Gompertz;
- Lei de Heligman-Pollard – em sua 1ª Lei (versão B), 2ª Lei e 3ª Lei – voltada para representar a mortalidade em diferentes fases da vida.

Detalham-se tanto os pressupostos de cada lei quanto os métodos de estimativa de seus parâmetros, tomando como base os dados observados.

Na subseção 3.3.3, é feita uma comparação entre as leis de mortalidade ajustadas para definir qual delas melhor se alinha à realidade observada. Nesse processo, serão utilizados os Critérios de Informação de Akaike (*AIC*) e Bayesiano (*BIC*), que equilibram a qualidade do ajuste com a complexidade do modelo. Adicionalmente, utilizam-se medidas de efeito que

auxiliarão na compreensão da magnitude das diferenças entre os modelos e coeficiente de determinação R^2 .

Finalmente, na subseção 3.3.4, avalia-se o quanto a escolha do modelo de mortalidade afeta a precificação das rendas atuariais. As rendas serão calculadas com base nas diferentes tábuas de mortalidade, sendo comparadas por meio de indicadores como razão entre rendas, a medida de efeito d de Cohen e o teste de Mann-Whitney. Dessa forma, é possível mensurar o grau de associação entre os modelos ajustados e seus reflexos sobre a precificação atuarial.

Em síntese, esta estrutura busca fornecer um embasamento quantitativo sólido para a escolha do modelo de mortalidade, com base não apenas na qualidade estatística dos ajustes, mas também pela viabilidade prática dos resultados.

3.3.1 Testes de aderência de tábuas de mortalidade

O cuidado com a tábua adequada escolhida é indispensável na redução de possíveis distorções na precificação de produtos previdenciários e securitários. Segundo Booth e Tickle (2008), embora a abordagem extrapolativa de modelagem seja amplamente utilizada, muitas vezes ela não passa por uma avaliação crítica aprofundada sobre sua capacidade de reproduzir a realidade.

Antes de aplicar os testes de aderência, é pertinente confirmar se o pressuposto de normalidade é atendido ou não. No que se refere à normalidade, Capp e Nienov (2020) ressaltam a importância de utilizar testes adequados para identificar desvios significativos da distribuição normal, especialmente quando se trabalha com amostras reduzidas.

Nesse caso, o teste Shapiro-Wilk será empregado em amostras menores, considerando que, de acordo com Spiegel, Schiller e Srinivasan (2013), esse teste se mostra bastante sensível a desvios da distribuição normal. Nesse caso, a estatística W é calculada pela equação (22).

$$W = \frac{(\sum_{i=1}^n a_i q_{x(i)})^2}{\sum_{i=1}^n (q_{x,i} - \bar{q}_x)^2} \quad (22)$$

Em que $\sum_{i=1}^n a_i q_{x(i)}$ corresponde ao somatório ponderado dos valores de probabilidade de morte observado em ordem crescente, enquanto o denominador representa a soma dos quadrados do desvio de cada valor em relação à média.

No teste de Shapiro-Wilk, a hipótese nula (H_0) assume que os dados seguem uma distribuição normal. Portanto, ao aplicar esse teste, está-se avaliando se as probabilidades de

morte observadas têm comportamento compatível com a normalidade, o que é uma premissa desejável antes da aplicação de diversos testes paramétricos subsequentes (Spiegel; Schiller; Srinivasan, 2013; Capp; Nienov, 2020).

Uma vez realizado o teste de Shapiro-Wilk e rejeitada a hipótese de normalidade, a aderência das tábuas de mortalidade será verificada por meio de testes não paramétricos, como o qui-quadrado χ^2 . Para avaliar a qualidade do ajuste das tábuas à mortalidade real, comparamos, para cada idade x , o quadrado da diferença entre o número observado d_x e o esperado d_x^{exp} , dividido pela variância de d_x , isto é:

$$\chi^2 = \sum_{x=x_{min}}^{x_{max}} \frac{(d_x - d_x^{exp})^2}{Var(d_x)} \quad (23)$$

Valores elevados de χ^2 indicam uma maior discrepância entre as amostras, enquanto valores menores sugerem que o ajuste entre os dados observados e esperados é adequado. Esses valores são comparados com uma distribuição χ^2 para verificar a significância estatística dos resultados, considerando um nível de significância predefinido.

No caso do teste χ^2 , H_0 postula que não há diferença significativa entre as frequências observadas e as frequências esperadas das probabilidades de morte. Esse teste permite decidir se as discrepâncias entre observados e esperados são compatíveis com a tábua teórica ou indicam necessidade de revisão da tábua (Bravo, 2007).

O teste de Kolmogorov-Smirnov (KS) pode ser aplicado para examinar se há desajustes marcantes na distribuição acumulada entre dados e estimativas (Pires *et al.*, 2018). Conforme Bravo (2007), KS pode ser usado na graduação para comparar as distribuições dos óbitos observados e esperados entre as idades x_{min} e x_{max} Seja:

$$D^{act} = \sum_{k=x_{min}}^{x_{max}} d_k \quad (24.1)$$

$$D^{exp} = \sum_{k=x_{min}}^{x_{max}} d_k^{exp} \quad (24.2)$$

Que correspondem, respectivamente, ao total de óbitos observados e ao total esperado no intervalo de idades analisado. Com as informações de D^{act} e D^{exp} , conseguimos calcular as distribuições acumuladas, conforme as equações (24.3) e (24.4).

$$F(x) = \frac{1}{D^{act}} \left(\sum_{k=x_{min}}^x d_k \right) \quad (24.3)$$

$$G(x) = \frac{1}{D^{exp}} \left(\sum_{k=x_{min}}^x d_k^{exp} \right) \quad (24.4)$$

Em seguida, determinamos a maior discrepância entre essas duas curvas pela fórmula a seguir.

$$Dev^{max} = \max_x |F(x) - G(x)| \quad (24.5)$$

Por fim, incorporamos esse desvio ao tamanho relativo das duas amostras na estatística, calculado por (24.6).

$$W^{KS} = Dev^{max} \left(\frac{D^{act} D^{exp}}{D^{act} + D^{exp}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (24.6)$$

Resume, em um único valor, a força desse desvio máximo. Valores altos de W^{KS} indicam que a diferença entre as distribuições não se deve ao acaso, reforçando a rejeição da hipótese de que observados e esperados seguem o mesmo padrão (Bravo, 2007). A probabilidade $p(W^{KS})$ pode ser aproximada ou obtida por tabelas específicas de KS.

Paralelamente aos testes estatísticos, a avaliação da qualidade do ajuste é enriquecida pela aplicação de métricas de erro que mensuram quão distantes estão os valores ajustados dos observados. O Erro Quadrático Médio (*RMSE*), expresso na Equação (25), capta a magnitude dos desvios, atribuindo maior peso aos erros mais expressivos devido à elevação ao quadrado.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (q_{x(i),obs} - q_{x(i),teo})^2} \quad (25)$$

Já o Erro Absoluto Médio (*MAE*), conforme a Equação (26), mede a discrepância média em termos absolutos, conforme McCarthy e Mitchell (2000), e, por não elevar as diferenças ao quadrado, torna-se menos sensível a valores extremos.

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |q_{x(i),obs} - q_{x(i),teo}| \quad (26)$$

Ao comparar *RMSE* e *MAE*, pode-se ter uma visão ampla de como os modelos representam, em média, a distribuição dos eventos de mortalidade e se existem desvios substanciais que afetam a precisão do ajuste.

O resultado dessa etapa possibilita determinar o grau de adequação das tábuas de mortalidade propostas, conferindo uma base estatística para decidir se é necessário ajustar ainda mais os modelos ou substituir aqueles que não se mostrem eficazes em representar a realidade observada.

3.3.2 Leis de mortalidade

No âmbito desta análise, foram selecionadas três leis de mortalidade, já discutidas anteriormente na seção 2.3.2, por serem amplamente utilizadas em diversos estudos atuariais e reconhecidas pela simplicidade e capacidade de representar diferentes fases da vida – Lei de Gompertz, Lei de Makeham e Lei de Heligman-Pollard –, conforme destacado por Bowers *et al.* (1997), Dickson, Hardy e Waters (2013) e Bravo (2007). Em complemento, utilizam-se as funções biométricas de l_x e o d_x dada pela função *MortalityLaw*, presente no pacote *MortalityLaws* do R, de autoria de Pascariu (2024).

3.3.2.1 Lei de Gompertz

A Lei de Gompertz é uma das mais clássicas no estudo da mortalidade. Ela assume que a taxa de mortalidade aumenta de forma exponencial com a idade, refletindo o aumento progressivo no risco de morte conforme o envelhecimento (Alba, 1965).

Como Bowers *et al.* (1997) apontam, essa simplicidade faz com que a Lei de Gompertz seja uma escolha comum para modelar a mortalidade de populações em faixas etárias elevadas. Essa lei é calculada de acordo com a Equação (27).

$$\mu(x) = Be^{Cx} \quad (27)$$

Onde B é o parâmetro que ajusta a mortalidade inicial; C é o parâmetro que representa a taxa de aumento exponencial da mortalidade com a idade. Esses parâmetros são estimados geralmente por máxima verossimilhança a partir de séries históricas (Bravo, 2007).

Essa lei é amplamente aplicada em cálculos atuariais, especialmente em seguros de vida, pela simplicidade e eficiência com que captura o comportamento da mortalidade em idades avançadas (Bowers *et al.*, 1997; Dickson; Hardy; Waters, 2013; Wüthrich e Merz, 2022). Ainda, os autores Wüthrich e Merz (2022) corroboram a aplicabilidade desse modelo em diversas análises de risco, tornando-o um dos mais utilizados no mercado atuarial.

3.3.2.2 Lei de Makeham

A Lei de Makeham complementa a Lei de Gompertz ao adicionar um componente constante à taxa de mortalidade, permitindo que ela capture não apenas o efeito do envelhecimento, mas também fatores externos, como acidentes e doenças, que podem afetar a mortalidade em qualquer fase da vida (Alba, 1965).

Essa abordagem mais abrangente permite uma modelagem mais precisa, especialmente em populações onde as causas externas de mortalidade são significativas. Bravo (2007) destaca que a Lei de Makeham é útil para ajustar melhor as taxas de mortalidade em idades intermediárias, onde fatores não relacionados ao envelhecimento ainda desempenham um papel vital, assim, a mortalidade, de acordo com a formulação de Makeham, pode ser obtida por (28).

$$\mu(x) = A + Be^{Cx} \quad (28)$$

Onde $\mu(x)$ representa a taxa de mortalidade em uma idade x ; A é um parâmetro que representa o risco de morte que independe da idade; B e C continuam a ajustar a mortalidade relacionada à idade, como na Lei de Gompertz.

Esse acréscimo confere ao modelo maior flexibilidade, especialmente útil para populações expostas a riscos externos significativos, como acidentes ou doenças crônicas, em todas as idades (Dickson; Hardy; Waters, 2013; Bravo, 2007; Rodrigues, 2012).

3.3.2.3 Lei de Heligman-Pollard

A Lei de Heligman-Pollard oferece uma modelagem mais complexa, ao dividir a mortalidade em três componentes: mortalidade infantil, mortalidade por causas acidentais na juventude e mortalidade em idades avançadas. Este modelo é mais flexível e abrangente, sendo capaz de ajustar a mortalidade em diferentes faixas etárias com maior exatidão (Heligman; Pollard, 1980).

Segundo Dickson, Hardy e Waters (2013), essa lei destaca-se pela possibilidade de ajustar parâmetros voltados especificamente a cada uma dessas três faixas etárias, conferindo maior poder de representação às análises atuariais. Bravo (2007) apresenta três versões da Lei de HP, cada uma delas incorporando refinamentos adicionais para diferentes contextos populacionais: a 1ª Lei (versão B), a 2ª Lei e a 3ª Lei (ver a seção 2.3.2 para mais detalhes).

Para fins de simplificação, a versão B da 1ª Lei foi escolhida devido ao seu cálculo que resulta diretamente no q_x , enquanto sua versão A calcula um *odds-ratio* ($\frac{q_x}{p_x}$).

De forma geral, as funções utilizadas para descrever o risco de morte em cada versão seguem o formato apresentado a seguir. As fórmulas (29.1), (29.2) e (29.3) exemplificam como cada termo é ajustado para representar diferentes faixas etárias, do nascimento à velhice.

$$q_x = A^{(x+B)^c} + De^{-E(\ln x - \ln F)^2} + \frac{GH^x}{1 + GH^x} \quad (29.1)$$

$$q_x = A^{(x+B)^c} + De^{-E(\ln x - \ln F)^2} + \frac{GH^x}{1 + KGH^x} \quad (29.2)$$

$$q_x = A^{(x+B)^c} + De^{-E(\ln x - \ln F)^2} + \frac{GH^{x^K}}{1 + GH^{x^K}} \quad (29.3)$$

Onde os parâmetros A , B e C ajustam a mortalidade em idades jovens; D , E e F modelam a mortalidade em idades intermediárias, particularmente a parte central da curva de mortalidade; G e H capturam o comportamento da mortalidade em idades avançadas, onde a taxa de mortalidade aumenta de forma exponencial (Heligman; Pollard, 1980). O parâmetro K ,

presente nas últimas versões, confere maior flexibilidade à curvatura da mortalidade em idades extremas.

Os parâmetros dessa lei permitem capturar de forma precisa as variações na mortalidade ao longo das diferentes fases da vida. O primeiro termo $A^{(x+B)^c}$ é responsável por modelar a mortalidade em idades jovens, enquanto o segundo termo $De^{-E(\ln x - \ln F)^2}$ foca na mortalidade durante a idade adulta, conforme explicado por Bowers *et al.* (1997). Já o último termo GH^x captura o aumento da mortalidade em idades avançadas, refletindo a maior propensão ao óbito à medida que a idade avança.

Essas versões foram criadas para melhor ajustar o modelo a populações em transição epidemiológica (versão B), ao envelhecimento (2ª Lei), ou ainda para maximizar a adaptabilidade do modelo sem sacrificar a interpretabilidade (3ª Lei) (Bravo, 2007; Dickson; Hardy; Waters, 2013). Essa família de leis é amplamente usada para calibração de tábuas, especialmente quando se deseja capturar nuances específicas de mortalidade ao longo do tempo e faixas etárias.

3.3.3 Seleção de modelos

Após a aplicação dos testes de aderência e a verificação de que as tábuas de mortalidade ajustadas apresentam boa correspondência com os dados observados, surge a necessidade de identificar qual modelo melhor representa a realidade biométrica estudada. Neste sentido, a utilização de critérios estatísticos adequados permite minimizar erros na modelagem, garantindo maior confiabilidade nas projeções (Guimarães, 2008)

Para nortear essa seleção, são adotados critérios estatísticos que equilibram a qualidade do ajuste e a complexidade do modelo, evitando a chamada superparametrização, em que o excesso de variáveis pode levar ao ajuste perfeito dos dados observados, porém com pouca capacidade de generalização para cenários futuros (Booth; Tickle, 2008). Entre os critérios mais difundidos, destacam-se o *AIC* e o *BIC*, que mensuram tanto o grau de adequação do modelo quanto a penalização pela presença de muitos parâmetros.

O *AIC*, cujo cálculo pode ser visto na Equação (30), usa k para representar a quantidade de parâmetros do modelo e emprega $\ln(L)$ como a função de verossimilhança, ou seja, a probabilidade de observar os dados considerando determinada configuração de parâmetros.

$$AIC = 2k - 2 \ln(L) \quad (30)$$

Já o *BIC*, expresso na Equação (31), introduz uma penalidade mais severa à complexidade ao multiplicar k pelo logaritmo do tamanho amostral n .

$$BIC = k \ln(n) - 2 \ln(L) \quad (31)$$

Ambos os critérios indicam melhor desempenho para modelos com valores mais baixos, refletindo melhor equilíbrio entre ajuste e simplicidade. Enquanto o *AIC* tende a favorecer modelos com maior capacidade preditiva, o *BIC* prioriza estruturas mais enxutas.

A função de verossimilhança L representa a probabilidade de os dados observados ocorrerem dado um conjunto de parâmetros ajustados. Quanto maior for L , melhor o modelo se ajusta aos dados observados. Já o valor de n deve incluir todos os pontos de observação considerados na modelagem (Booth; Tickle, 2008).

Para verificar se as diferenças entre modelos são estatisticamente relevantes, podem ser empregados testes de significância que comparam os valores de *AIC* e *BIC*, além de confrontar diretamente os ajustes por meio de técnicas de verossimilhança. Entretanto, conforme observado por Guimarães (2008), esses critérios não são suficientes para quantificar diretamente os erros cometidos na estimação.

Por isso, faz-se necessária a verificação do grau de precisão na estimação das probabilidades de morte, o que remete às mesmas métricas de erro apresentadas na subseção 3.3.1: *RMSE*, *MAE* e, adicionalmente, o R^2 (Coeficiente de Determinação).

O *RMSE*, sensível a discrepâncias maiores, calcula a raiz da média dos quadrados das diferenças entre as probabilidades observadas e ajustadas, enquanto o *MAE* fornece uma visão menos influenciada por valores extremos, ao levar em conta o módulo dessas diferenças. Por sua vez, o R^2 , conforme a Equação (32), mostra o quanto o modelo consegue explicar os valores observados. Quanto mais próximo de 1, maior a capacidade explicativa.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (a_{x(i),obs} - a_{x(i),teo})^2}{\sum_{i=1}^n (a_{x(i),obs} - \bar{a}_{x(i)})^2} \quad (32)$$

Onde, $a_{x(i),obs}$ corresponde ao valor real observado para a mortalidade no ponto i , $a_{x(i),teo}$ é o valor estimado pelo modelo e $\bar{a}_{x(i)}$ indica a média das observações.

Essa abordagem garante que a tábua de mortalidade escolhida seja estatisticamente boa, ajustada à amostra e aplicável ao contexto atuarial, contribuindo tanto para a viabilidade financeira quanto para a justiça na tarifação dos produtos (Teixeira; Gomes; Santos, 2020).

3.3.4 Comparação entre rendas calculadas pelas diferentes tábuas

A definição da tábua de mortalidade utilizada na precificação de rendas influencia diretamente o valor dos benefícios esperados, refletindo os pressupostos adotados sobre o risco de morte (Cordeiro Filho, 2014). Para verificar se essas diferenças entre anuidades são significativas, o estudo considerou uma taxa de juros de 4% ao ano, para o cálculo das rendas, e ferramentas como testes de comparação, medidas de efeito e métricas de erro.

Uma primeira ferramenta a ser utilizada para comparar as rendas calculadas por ambos os métodos de obtenção de tábua é a Razão entre as Anuidades obtidas (RA), expressa pela Equação (33).

$$RA = \frac{a_{x,teo}}{a_{x,adj}} \quad (33)$$

Onde $a_{x,teo}$ é a renda calculada pela tábua aderente; $a_{x,adj}$ é a renda calculada pelas tábuas das leis de mortalidade. $RA < 1$ indica que a tábua teórica resulta em rendas menores; $RA > 1$, indica uma sobreprecificação de $a_{x,teo}$ em relação a $a_{x,adj}$.

Essa razão fornece uma comparação direta para determinar se a adoção de leis de mortalidade distintas tende a encarecer ou baratear os prêmios pagos.

Para complementar a análise, O teste de Mann-Whitney verifica se há diferença significativa entre as distribuições de dois conjuntos de dados sem pressupor que essas distribuições sejam normais. Os autores Capp e Nienov (2020) explicam que os testes não paramétricos são fundamentais em análises de dados com distribuição assimétrica ou presença de *outliers*.

No contexto atuarial, aplica-se quando se deseja comparar as rendas resultantes de duas tábuas de mortalidade — por exemplo, uma tábua padrão do mercado versus uma tábua ajustada a um determinado grupo populacional — sem poder assumir que as rendas seguem distribuição normal.

A estatística do teste Mann-Whitney, muitas vezes denotada por U , pode ser calculada por:

$$U = n_{teo} n_{adj} + \frac{n_{teo}(n_{teo} + 1)}{2} - R_{teo} \quad (34)$$

Dado que R_{teo} corresponde à soma dos postos atribuídos às rendas do grupo teórico e n_{teo} e n_{adj} , ao número de rendas calculadas (tamanho amostral) em cada metodologia.

Para obter esses postos, unem-se as duas amostras e ordenam-se os valores de menor para maior, atribuindo-se o posto 1 ao menor valor, o posto 2 ao segundo menor e assim por diante, sem distinção inicial de qual amostra cada valor provém. Em seguida, somam-se os postos de cada amostra separadamente (R_{teo} e R_{adj}).

O teste verifica se a soma dos postos de um grupo difere significativamente do que seria esperado ao acaso. Se a diferença for grande, sugere que uma das amostras produz valores (neste caso, rendas) sistematicamente maiores ou menores que a outra.

A hipótese nula (H_0) afirma que as duas distribuições são semelhantes (ou seja, não há diferença sistemática entre as rendas obtidas pelas duas tábuas). A hipótese alternativa (H_1) sustenta que há discrepância.

A utilidade do Mann-Whitney na análise atuarial torna-se evidente quando as rendas apresentam forte assimetria, grande presença de *outliers* ou quando o tamanho amostral é insuficiente para aplicar testes paramétricos com confiança. Dessa forma, ele possibilita uma comparação confiável mesmo em cenários onde não se pode supor a normalidade dos dados.

Além de verificar a significância estatística, é importante considerar o tamanho do efeito, que mede a magnitude da diferença entre as médias das rendas. O d de Cohen é frequentemente utilizado para isso e pode ser obtido pela Equação (35).

$$d = \frac{a_{x,teo} - a_{x,adj}}{\sigma_p} \quad (35)$$

Os valores de d típicos, são: se $d = 0,2$, tem-se efeito pequeno; se $d = 0,5$, efeito médio; se $d = 0,8$, efeito grande. O desvio padrão combinado das rendas σ_p é calculado como:

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{(n_{teo} - 1)Var[a_{x,teo}] + (n_{adj} - 2)Var[a_{x,adj}]}{n_{teo} + n_{adj} - 2}} \quad (36)$$

Sendo $Var[a_{x,teo}]$ e $Var[a_{x,adj}]$ são as variâncias das rendas oriundas das duas tábuas.

Em conclusão, a combinação da RA, do teste de Mann-Whitney e do d de Cohen permite avaliar se as rendas diferem significativamente entre as tábuas e qual a magnitude prática dessas diferenças.

Com essa base metodológica consolidada, o estudo prossegue para a próxima etapa, onde serão apresentados os resultados obtidos a partir da aplicação desses modelos.

4 RESULTADOS

São apresentados os resultados obtidos a partir da análise dos dados de mortalidade extraídos do HMD referentes ao Chile. Isso inclui a validação da normalidade dos resíduos, a adequação das tábuas de mortalidade chilenas (ver seção 4.1.2) e a aplicação de modelos paramétricos para ajuste das curvas. Com base nesses procedimentos, avalia-se a capacidade dos modelos em representar a dinâmica empírica das probabilidades de morte e os impactos sobre o preço das rendas atuariais.

4.1 OBTENÇÃO DAS TÁBUAS DE MORTALIDADE

Esta subseção detalha o processo de obtenção das tábuas utilizadas no estudo, desde o tratamento inicial dos dados até a aplicação dos modelos de ajuste. Na subseção 4.1.1, trata-se da filtragem e da verificação dos pressupostos estatísticos – já descritos na seção 3.2. Em 4.1.2, apresentam-se os resultados dos testes de aderência, com complementação por métricas de erro. Por fim, a subseção 4.1.3 aborda os ajustes dos modelos paramétricos, com base nos critérios de seleção aplicados.

4.1.1 Base de dados e verificação de normalidade dos dados

A divisão dos dados em diferentes períodos permitiu identificar mudanças estruturais na dinâmica da mortalidade ao longo do tempo, possibilitando a observação de tendências e transformações que refletem fatores demográficos e socioeconômicos. Além disso, a segmentação por sexo evidenciou as diferenças já conhecidas entre as curvas de mortalidade feminina e masculina, reforçando achados amplamente discutidos na literatura (Dias, 2014; Pires *et al.*, 2018).

Os resultados, expostos no Quadro 2, resume os resultados do teste de Shapiro-Wilk, com valores-p muito inferiores ao nível de significância de 5%.

Quadro 2 – Máximos p-valores de W por sexo

Sexo	Estatística W
Feminino	$1,55 \cdot e^{-16}$
Masculino	$7,89 \cdot e^{-16}$
Total	$3,03 \cdot e^{-16}$

Fonte: Elaboração Própria.

Os resultados indicam forte rejeição da hipótese de normalidade dos resíduos. Tais resultados corroboram a evidência de que, em contextos atuariais, os dados frequentemente não se comportam de forma paramétrica, como também observado em outras análises estatísticas (Capp; Nienov, 2020; Hogg; McKean; Craig, 2020).

A análise reforça a necessidade de métodos que lidem com assimetrias e alta variabilidade, especialmente nas faixas etárias extremas. Assim, os testes de aderência KS e χ^2 , além das métricas *MAE* e *RMSE*, foram adotados para avaliar a adequação das tábuas teóricas, conforme também indicado por Bowers *et al.* (1997) e Wüthrich e Merz (2022).

Adicionalmente, a verificação dos pressupostos não só valida a metodologia adotada, mas também delimita as condições sob as quais os ajustes e comparações devem ser realizados. Com essa fundamentação, o estudo prossegue para a análise dos testes de aderência, os quais fornecerão indicadores quantitativos que permitirão comparar diretamente a confiabilidade dos ajustes das tábuas teóricas em relação aos dados observados.

4.1.2 Resultados dos testes de aderência

Foram utilizadas as tábuas de origem chilena, extraídas do Society of Actuaries (s.d.), para realizar os testes de aderência em relação aos dados empíricos do Chile para 9 tábuas de mortalidade – M-70 KW, M-95 M, M-95 H, MI-2006 M, MI-2006 H, B-2006 M, B-2006 H, Tabla de Mortalidad RV-2004 – Mujeres e Tabla de Mortalidad RV-2004 - Hombres. Os testes KS e χ^2 foram aplicados com o mesmo nível de significância de 5%, permitindo avaliar a adequação estatística das tábuas teóricas (Bowers *et al.*, 1997; Wüthrich; Merz, 2022).

A seguir, apresenta-se o Quadro 3, que resume os resultados dos testes estatísticos de KS e χ^2 , com seus respectivos p-valores.

Quadro 3 – As 5 primeiras tábuas aderentes com resultados dos testes por sexo

Sexo	Tábua	KS (p-valor)	X ² (p-valor)
Feminino	B-2006 H	0,0376	1
	Tabla de Mortalidad RV-2004 - Hombres	0,2325	1
	M-95 M	0,0510	1
	M-95 H	0,0000	1
	B-2006 H	0,9969	1
Masculino	B-2006 H	0,9353	1
	Tabla de Mortalidad RV-2004 - Hombres	0,7680	1
	M-70 KW	0,0000	1
	MI-2006 M	0,0000	1
	M-95 H	0,0000	1
Total	B-2006 H	0,2629	1
	Tabla de Mortalidad RV-2004 - Hombres	0,9896	1
	M-70 KW	0,0005	1
	M-95 H	0,0000	1
	B-2006 M	0,6469	1

Fonte: Elaboração Própria.

A análise do Quadro 3 evidencia que no teste χ^2 , todas as tábuas exibiram p-valor = 1, indicando ajuste ótimo. Já no KS, apenas B-2006 H e Tabla de Mortalidad RV-2004 – Hombres mantêm $p > 0,05$ nos grupos Feminino e Masculino; no Total, juntam-se a elas B-2006 M. São as únicas a não rejeitar o KS, apesar de todas as tábuas ajustarem perfeitamente ao χ^2

Em complemento aos testes estatísticos, foram aplicadas métricas de erro para as mesmas tábuas, com o objetivo de quantificar o grau de aproximação entre os valores estimados e observados. O Quadro 4 apresenta as métricas *MAE*, *RMSE* e *R²*, por sexo, das cinco tábuas mais aderentes.

Quadro 4 – As 5 primeiras tábuas aderentes com resultados das métricas por sexo

Sexo	Tábua	MAE	RMSE	R ²
Feminino	B-2006 H	0,0045	0,0073	0,9977
	Tabla de Mortalidad RV-2004 - Hombres	0,0076	0,0122	0,9943
	M-95 M	0,0110	0,0448	0,9079
	M-95 H	0,0158	0,0461	0,9091
	B-2006 H	0,0170	0,0338	0,9496
Masculino	B-2006 H	0,0170	0,0338	0,9496
	Tabla de Mortalidad RV-2004 - Hombres	0,0113	0,0212	0,9843
	M-70 KW	0,0124	0,0443	0,9227
	MI-2006 M	0,0171	0,0278	0,9690
	M-95 H	0,0200	0,0502	0,9018
Total	B-2006 H	0,0019	0,0035	0,9995
	Tabla de Mortalidad RV-2004 - Hombres	0,0049	0,0113	0,9951
	M-70 KW	0,0139	0,0446	0,9162
	M-95 H	0,0202	0,0374	0,9390
	B-2006 M	0,0257	0,0545	0,8751

Fonte: Elaboração Própria.

Dentre as tábuas femininas, B-2006 H sobressai pelos menores MAE (0,0045) e $RMSE$ (0,0073) e alto R^2 (0,9977), refletindo excelente ajuste aos dados empíricos. No masculino, a Tabla de Mortalidad RV-2004 – Hombres obteve o melhor equilíbrio entre erro ($MAE = 0,0113$; $RMSE = 0,0212$) e explicação estatística ($R^2 = 0,9843$). Para o total, B-2006 H novamente lidera ($MAE = 0,0019$; $RMSE = 0,0035$; $R^2 = 0,9995$), confirmando sua robustez em análises agregadas. Assim, essas três tábuas — B-2006 H (feminino e total) e Tabla de Mortalidad RV-2004 – Hombres (masculino) — apresentam os indicadores de erro mais baixos e o melhor ajuste, configurando-se como referências ideais para as comparações que se seguem.

4.1.3 Ajustes e seleção das leis de mortalidade

Foram ajustadas leis de mortalidade clássicas — Gompertz, Makeham e as versões da lei de HP — com base na técnica de máxima verossimilhança. Os modelos foram avaliados pelos critérios de informação, além das métricas, conforme o Quadro 5.

Quadro 5 – Resultado dos melhores modelos ajustados pelas métricas por sexo

Sexo	Modelo	AIC	BIC	RMSE	MAE	R ²
Feminino	HP – 1ª Lei Versão B	-735,3203	-713,6441	0,0339	0,0094	0,9624
Masculino	HP – 2ª Lei	-738,1605	-713,7747	0,0332	0,0116	0,9654
Total	HP – 2ª Lei	-738,1038	-713,7180	0,0332	0,0114	0,9625

Fonte: Elaboração Própria.

Os ajustes revelam perfis distintos de mortalidade em cada grupo: para as mulheres, a 1ª Lei Versão B equilibra com maestria simplicidade e fidelidade, capturando as nuances das idades sem sobreajustar; já para os homens, a 2ª Lei – com um grau extra de flexibilidade – consegue reduzir ainda mais os desvios. Para o grupo total, o mesmo modelo da 2ª Lei mantém seu desempenho de ponta.

Esses resultados reforçam que diferentes versões da lei de HP se adaptam melhor a perfis de mortalidade específicos, justificando a escolha de modelos diferenciados para cada grupo demográfico (Bowers *et al.*, 1997; Wüthrich; Merz, 2022).

Com base nessas evidências, a próxima seção analisará o impacto da escolha entre tábuas teóricas e ajustadas na precificação das rendas atuariais.

4.2 IMPACTO DA TÁBUA ADOTADA SOBRE O CÁLCULO DAS RENDAS ATUARIAIS

Esta subseção tem por objetivo analisar como a escolha entre tábuas teóricas – validadas por meio dos testes de aderência – e tábuas empíricas – ajustadas por leis de mortalidade – influencia o cálculo das rendas atuariais, considerando os diferentes tipos de anuidades e os cenários avaliados. Para tal, apresentam-se inicialmente os produtos atuariais e a definição dos cenários, os quais se baseiam em três parâmetros:

- n : a temporariedade, representando o período de cobertura;
- m : o diferimento, que corresponde ao tempo de atraso para o início dos pagamentos;
- y : a idade do indivíduo Y, sendo Y mais velho que o indivíduo X, com a relação expressa por $y = x + \text{constante}$.

Essas categorias permitem uma análise detalhada dos diferentes cenários de precificação, levando em consideração o momento de início dos pagamentos, a duração da cobertura e o *timing* dos desembolsos. Foram avaliados dois cenários distintos, a fim de explorar as variações dos parâmetros n , m e y e seu impacto sobre as rendas atuariais. Para o primeiro cenário, foi adotado os valores $n = 5$, $m = 4$, $y = x + 3$, para todas as idades de x .

Para avaliar o impacto da escolha da tábua de mortalidade neste primeiro cenário, o Quadro 6 apresenta para cada produto e grupo as medidas de tendência central e dispersão da razão de anuidade, calculadas conforme a média aritmética dos valores de RA em todas as idades e seu desvio-padrão, que quantifica a variação desses valores em torno da média.

Quadro 6 – Informações estatísticas dos valores da RA por produto e sexo (Cenário 1)

Produto	Feminino		Masculino		Total	
	Média	DP	Média	DP	Média	DP
\ddot{a}_x	0,99	0,08	0,67	0,20	10,28	0,09
$\ddot{a}_{x:\bar{n} }$	10,10	0,05	0,91	0,13	10,19	0,06
${}_m \ddot{a}_x$	10,96	0,43	0,58	0,29	12,92	11,20
${}_m \ddot{a}_{x:\bar{n} }$	10,47	0,24	0,79	0,27	10,86	0,35
a_x	10,16	0,14	0,64	0,23	10,78	0,24
$a_{x:\bar{n} }$	10,21	0,10	0,87	0,18	10,37	0,14
${}_m a_x$	11,23	0,54	0,56	0,30	13,77	15,16
${}_m a_{x:\bar{n} }$	10,54	0,28	0,77	0,29	10,98	0,41
\ddot{a}_{xy}	0,99	0,08	0,67	0,19	10,26	0,09
$\ddot{a}_{xy:\bar{n} }$	10,10	0,05	0,91	0,13	10,19	0,06
${}_m \ddot{a}_{xy}$	10,91	0,43	0,57	0,28	12,89	11,21
${}_m \ddot{a}_{xy:\bar{n} }$	10,47	0,24	0,79	0,27	10,85	0,35
a_{xy}	10,12	0,14	0,64	0,22	10,75	0,24
$a_{xy:\bar{n} }$	10,20	0,10	0,87	0,18	10,37	0,14
${}_m a_{xy}$	11,18	0,54	0,56	0,29	13,73	15,16
${}_m a_{xy:\bar{n} }$	10,53	0,28	0,77	0,29	10,98	0,41
$\ddot{a}_{\overline{xy}}$	0,97	0,06	0,79	0,22	0,97	0,06
$\ddot{a}_{\overline{xy}:\bar{n} }$	10,00	0,00	1,00	0,00	10,00	0,00
${}_m \ddot{a}_{\overline{xy}}$	0,97	0,06	0,78	0,22	0,97	0,07
${}_m \ddot{a}_{\overline{xy}:\bar{n} }$	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00
$a_{\overline{xy}}$	0,96	0,12	0,78	0,23	0,96	0,12
$a_{\overline{xy}:\bar{n} }$	1,00	0,00	1,00	0,00	10,00	0,00
${}_m a_{\overline{xy}}$	0,97	0,07	0,78	0,21	0,97	0,07
${}_m a_{\overline{xy}:\bar{n} }$	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00

Fonte: Elaboração Própria.

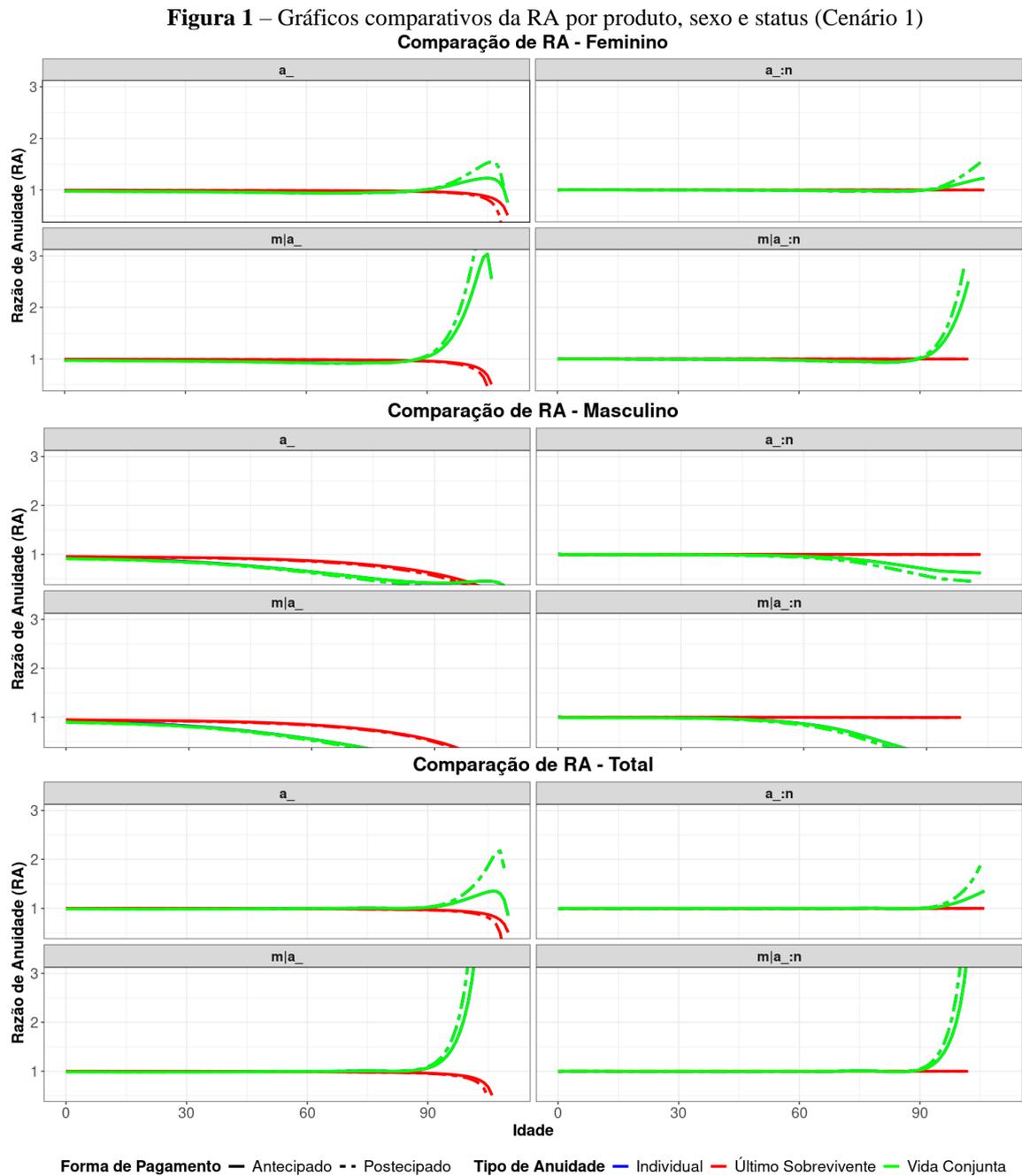
No Cenário 1, as anuidades imediatas e temporárias (\ddot{a}_x , a_x , $\ddot{a}_{x:\bar{n}|}$, $a_{x:\bar{n}|}$) mantêm médias muito próximas de 1 (entre 0,96 e 1,10) e desvios padrão baixos ($\leq 0,14$ no Feminino e $\leq 0,23$ no Masculino), refletindo grande estabilidade na fase inicial de pagamentos. Já as anuidades com diferimento (${}_m|\ddot{a}_x$, ${}_m|a_x$ e variantes) elevam as médias para cerca de 10,53–11,23 no Feminino e 0,56–0,79 no Masculino, com desvios padrão que podem alcançar 0,54 – sinalizando maior dispersão ao postergar os fluxos.

No Total, as anuidades diferidas chegam a médias de 10,98–13,77 e DP de até 15,16 (para ${}_m|a_x$), reforçando a sensibilidade dos modelos ao prolongamento do risco. Em contraste, as anuidades de último sobrevivente sem diferimento ($\ddot{a}_{\overline{xy}}$, $a_{\overline{xy}}$) apresentam médias estáveis ($\approx 0,97$) e DP muito baixa (até 0,06), enquanto sua variante com diferimento ($\ddot{a}_{\overline{xy}:\bar{n}|}$, $a_{\overline{xy}:\bar{n}|}$) exhibe valores fixos (média = 1,00; DP = 0,00), evidenciando ausência de variabilidade nesses contratos.

Esses extremos – DP de 15,16 nas anuidades diferidas totais versus DP quase nulo nas anuidades de último sobrevivente diferidas – ilustram como o nível de diferimento e o tipo de

produto impactam diretamente a dispersão da razão de anuidade, ainda que todas as estruturas permaneçam estatisticamente sólidas para fins de precificação (Dickson; Hardy; Waters, 2013; Wüthrich; Merz, 2022).

Para melhor visualizar as variações nas razões de anuidade entre produtos, tábuas e grupos, é apresentado na Figura 1 o comparativo da RA por tipo de anuidade.



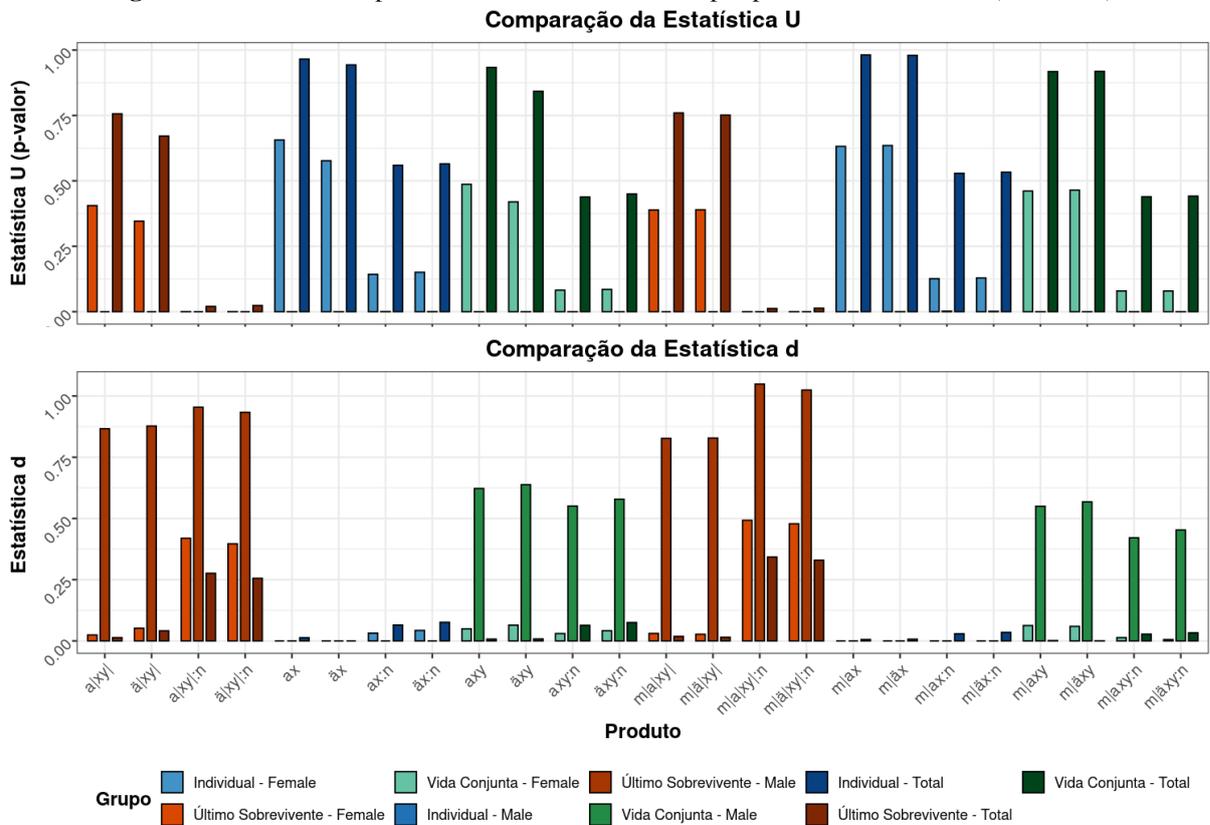
Fonte: Elaboração Própria.

Visualmente, a Figura 1 reforça a estabilidade observada nos produtos individuais, e conjuntos. As curvas de *RA* se sobrepõem de maneira quase imperceptível na maioria dos produtos, a ponto de as rendas individuais não aparecerem visualmente distintas, pois estão praticamente encobertas pelas curvas de vida conjunta, indicando valores muito semelhantes. Isso ocorre, pois, essas anuidades cessam o pagamento após a primeira morte de algum dos indivíduos.

Ambas as rendas apresentam certa variabilidade entre os regimes antecipado e postecipado, principalmente nas idades mais avançadas. Contudo, no caso da anuidade de último sobrevivente, é possível observar oscilações menos abruptas a partir das idades mais elevadas, especialmente nas rendas temporárias, o que reforça a tese de que essa estrutura é menos sensível à modelagem da longevidade extrema (Boateng; Omari-Sasu; Boateng, 2024).

Complementarmente, a Figura 2 mostra os valores da estatística *U* de Mann-Whitney e da estatística *d* de Cohen, permitindo avaliar a significância estatística e o impacto prático das diferenças entre os métodos de precificação.

Figura 2 – Gráficos comparativos das estatísticas *U* e *d* por produto, sexo e status (Cenário 1)



Fonte: Elaboração Própria.

Nos produtos individuais, observa-se forte alinhamento entre tábuas teóricas e paramétricas: no Feminino, U varia de 0,58 a 0,66 com d praticamente zero, enquanto no Total U alcança 0,94–0,98 e $d \leq 0,08$, indicando efeitos práticos desprezíveis (Dickson; Hardy; Waters, 2013). No Masculino, embora $U \approx 0$ em quase todos os casos, os valores de d também sejam nulos, sinalizando que as diferenças estatísticas não se traduzem em magnitude relevante.

Nas anuidades de vida conjunta, o Feminino apresenta U de 0,42–0,49 e d entre 0,05 e 0,06, e o Total U de 0,84–0,93 com d próximo de zero, confirmando coerência nas projeções, mas o Masculino exibe U muito baixo (≈ 0) e d em 0,55 a 0,64, sugerindo divergências moderadas (Wüthrich; Merz, 2022).

Já os produtos de último sobrevivente revelam discrepâncias marcantes: para homens, $U = 0$ e d de 0,83 a 1,05 – efeito prático moderado a grande –; no Total, U varia de 0,01 a 0,76 com d de 0,28 a 0,34; e no Feminino, U entre 0,0001 e 0,39 com d de 0,03 a 0,48. Esses resultados indicam que, enquanto estruturas simples ou compartilhadas mantêm estabilidade estatística e prática, as anuidades de último sobrevivente exigem atenção especial devido ao risco de sobrevivência prolongada e suas incertezas inerentes (Ríos; Peña, 2020). Em todos os casos de d negativos, interpretou-se o valor absoluto como medida da magnitude do efeito.

Após a análise do primeiro cenário, propõe-se agora um segundo conjunto de parâmetros mais exigente do ponto de vista atuarial, com o objetivo de avaliar a sensibilidade dos modelos em contextos de maior complexidade.

O Cenário 2 considera uma temporariedade ampliada ($n = 10$), um diferimento elevado ($m = 55$) e uma diferença etária significativa entre os indivíduos ($y = x + 10$), o que gera maior exposição ao risco de longevidade e amplia os desafios na estimativa das rendas atuariais.

Para o segundo cenário, o Quadro 7 apresenta os valores médios e desvios padrão das RA , segmentados por tipo de produto e sexo.

Quadro 7 – Informações estatísticas dos valores da RA por produto e sexo (Cenário 2)

Produto	Feminino		Masculino		Total	
	Média	DP	Média	DP	Média	DP
\ddot{a}_x	0,99	0,08	0,67	0,20	0,67	0,20
$\ddot{a}_{x:\bar{n} }$	1,00	0,04	0,86	0,17	0,86	0,17
${}_m \ddot{a}_x$	12,59	11,52	0,14	0,14	0,14	0,14
${}_m \ddot{a}_{x:\bar{n} }$	0,87	0,09	0,26	0,21	0,26	0,21
a_x	10,16	0,14	0,64	0,23	0,64	0,23
$a_{x:\bar{n} }$	1,00	0,06	0,84	0,21	0,84	0,21
${}_m a_x$	12,64	1,16	0,13	0,14	0,13	0,14
${}_m a_{x:\bar{n} }$	0,87	0,09	0,25	0,20	0,25	0,20
\ddot{a}_{xy}	0,99	0,08	0,67	0,19	0,67	0,19
$\ddot{a}_{xy:\bar{n} }$	1,00	0,04	0,86	0,17	0,86	0,17
${}_m \ddot{a}_{xy}$	11,51	10,74	0,05	0,05	0,05	0,05
${}_m \ddot{a}_{xy:\bar{n} }$	0,79	0,08	0,09	0,07	0,09	0,07
a_{xy}	10,10	0,14	0,63	0,22	0,63	0,22
$a_{xy:\bar{n} }$	1,00	0,06	0,83	0,21	0,83	0,21
${}_m a_{xy}$	11,49	10,76	0,05	0,05	0,05	0,05
${}_m a_{xy:\bar{n} }$	0,79	0,08	0,08	0,06	0,08	0,06
$\ddot{a}_{\overline{xy}}$	0,97	0,06	0,79	0,21	0,79	0,21
$\ddot{a}_{\overline{xy}:\bar{n} }$	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00
${}_m \ddot{a}_{\overline{xy}}$	0,87	0,08	0,24	0,10	0,24	0,10
${}_m \ddot{a}_{\overline{xy}:\bar{n} }$	0,94	0,03	0,42	0,13	0,42	0,13
$a_{\overline{xy}}$	0,96	0,12	0,77	0,23	0,77	0,23
$a_{\overline{xy}:\bar{n} }$	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00
${}_m a_{\overline{xy}}$	0,87	0,08	0,23	0,09	0,23	0,09
${}_m a_{\overline{xy}:\bar{n} }$	0,94	0,03	0,38	0,13	0,38	0,13

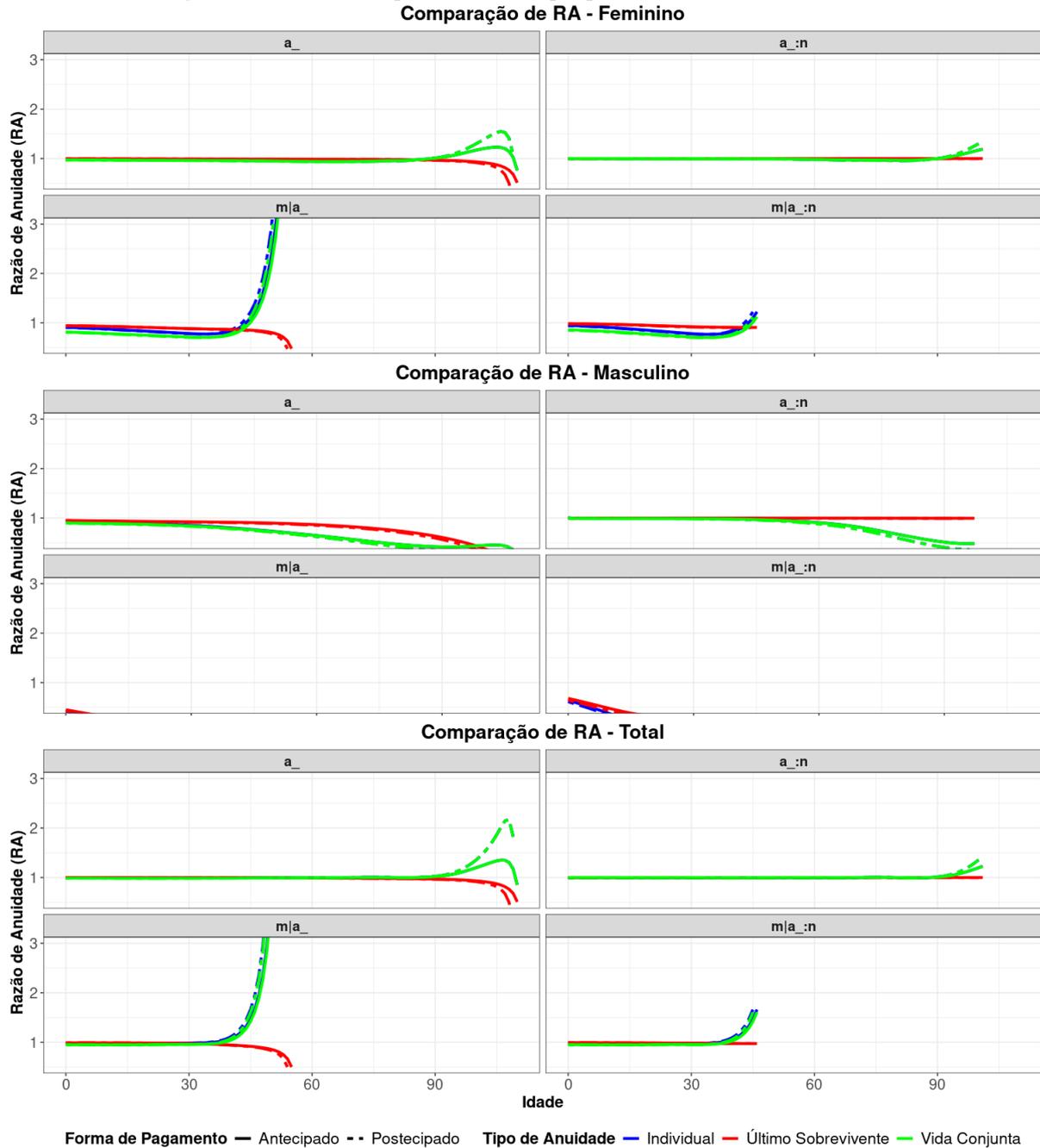
Fonte: Elaboração Própria.

No Cenário 2, as anuidades com diferimento (${}_m|\ddot{a}_x$, ${}_m|a_x$, ${}_m|\ddot{a}_{xy}$, ${}_m|a_{xy}$) apresentam saltos expressivos na RA para o grupo feminino, chegam a valores de até 12,6, com desvios padrão elevados indicando volatilidade muito maior quando os fluxos são postergados por longos períodos.

Em contraste, as anuidades imediatas e temporárias sem diferimento (\ddot{a}_x , a_x , $\ddot{a}_{x:\bar{n}|}$, $a_{x:\bar{n}|}$) mantêm médias próximas de 1,00 e DP abaixo de 0,23 em todos os grupos, reforçando que a ampliação de n sozinha não altera significativamente a consistência do modelo. Esses resultados confirmam que o componente de diferimento é o principal motor das discrepâncias nas projeções de fluxo de caixa de longo prazo, exigindo atenção extra na escolha da tábua e do método atuarial, como apontam Cairns, Blake e Dowd (2006) e Plat (2009).

A seguir, exibe-se a Figura 3, que compara a RA para o cenário 2 e permite observar visualmente os efeitos do aumento do diferimento e da diferença etária sobre os valores de anuidade.

Figura 3 – Gráficos comparativos da RA por produto, sexo e status (Cenário 2)



Fonte: Elaboração Própria.

No Cenário 2, em que o diferimento é modificado para 55 anos, as curvas de RA tendem a se distanciar do 1 à medida em que a idade cresce, com exceção das vitalícias individuais e de vida conjunta, e passam a divergir logo após esse ponto de carência, em vez de permanecerem paralelas até o final da vida como no Cenário 1.

A vida conjunta, especialmente no regime postecipado, dispara para valores acima de 3 muito mais cedo, ampliando o *gap* em relação ao antecipado. O grupo masculino apresentou

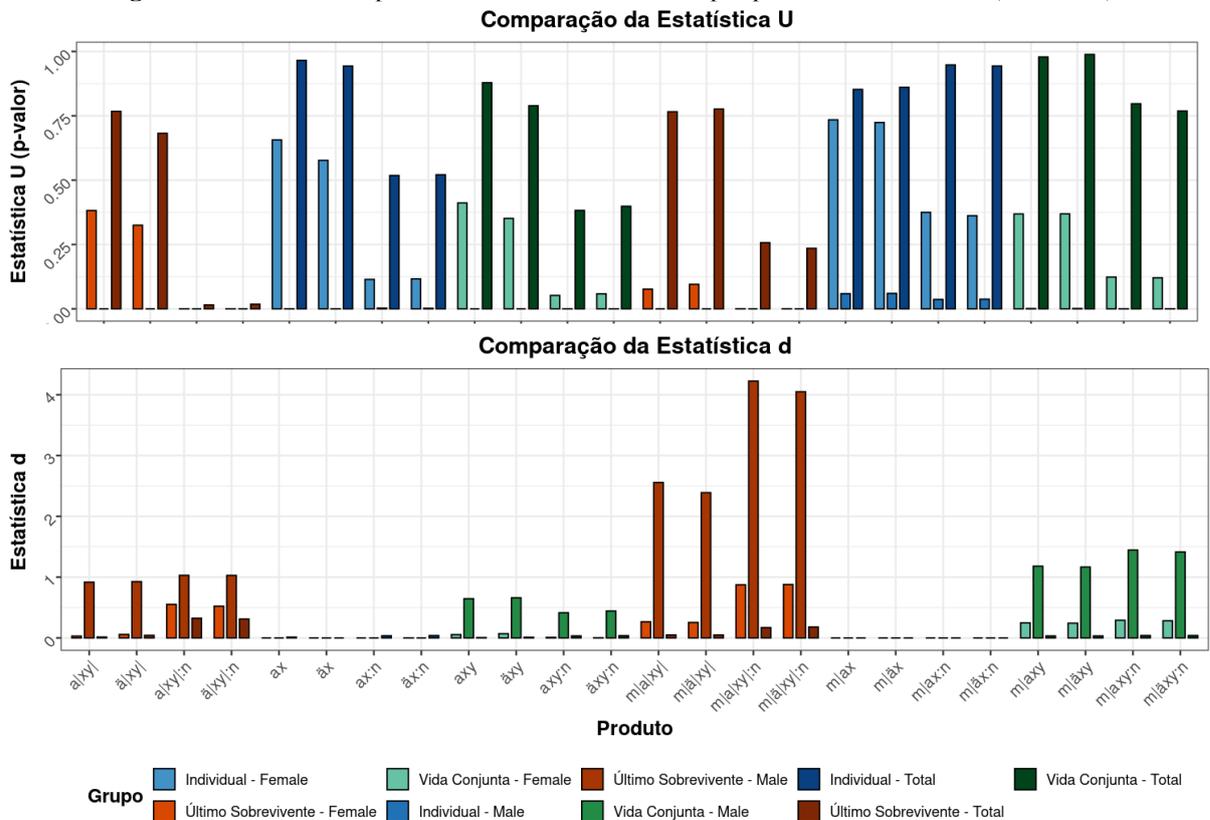
valores próximos de zero, em especial os produtos com carência, isso significa que as anuidades calculadas pelas tábuas aderentes são mais baratas em relação às anuidades ajustadas.

Além disso, as anuidades individuais — pouco visíveis no primeiro cenário por ficarem ocultas pelas curvas teóricas — tornam-se um pouco mais distintas, refletindo maior sensibilidade do modelo paramétrico ao prazo de diferimento. Em contraste, o produto de último sobrevivente mantém perfil estável em ambos os cenários, exibindo apenas uma leve queda após o início da carência.

Essas diferenças destacam como o ponto e o comprimento do diferimento impactam drasticamente a dispersão da RA em produtos com risco compartilhado ou prolongado, enquanto o último sobrevivente preserva consistência mesmo em situações de longevidade extrema.

A Figura 4 apresenta os valores da estatística U e do d , oferecendo uma análise quantitativa da significância estatística e do tamanho do efeito para cada produto para o Cenário 2.

Figura 4 – Gráficos comparativos das estatísticas U e d por produto, sexo e status (Cenário 2)



Fonte: Elaboração Própria.

É visto que no Cenário 1, anuidades individuais e de vida conjunta exibiam forte coerência estatística: p-valores U acima de 0,5 nos grupos Feminino e Total e d abaixo de 0,17, sinalizando diferenças práticas quase nulas. Já no Cenário 2, essas mesmas anuidades mantêm U elevados no Feminino (0,58–0,73) e no Total (0,85–0,97), mas caem para valores quase nulos no Masculino (0,001–0,06), refletindo maior sensibilidade ao diferimento prolongado ($m = 55$ e $y = x + 10$). Apesar disso, seus valores de d permanecem praticamente zero em todos os grupos – confirmando que, mesmo com prazos longos, produtos simples sem risco compartilhado continuam robustos em termos de magnitude de efeito prático.

Para vida conjunta, o p-valor U no Feminino declina de 0,42–0,49 (Cenário 1) para 0,12–0,41 (Cenário 2), e d sobe de ~0,05 para até 0,29. No Total, U permanece alto, mas d cresce modestamente; no Masculino, U continua quase zero e d ultrapassa 1,0. Nos de último sobrevivente, o Cenário 2 intensifica ainda mais as diferenças: U é praticamente zero para homens, chega a 0,38 no Feminino e varia até 0,24 no Total, enquanto d atinge 0,88 (Feminino), 4,22 (Masculino) e 0,32 (Total). Esses resultados mostram que contratos com cobertura complexa e diferimento longo são muito mais sensíveis às escolhas de tábuas e modelos atuariais.

4.3 CONCLUSÃO DOS RESULTADOS

Os resultados demonstraram que, para as tábuas chilenas testadas, os procedimentos de aderência estatística identificaram como mais confiáveis, nas faixas etárias intermediárias e em cenários sem diferimento, as tábuas B-2006 H e Tabla de Mortalidad RV-2004 – Hombres. Seus p-valores elevados ($U \approx 0,9$ –0,99; $d \approx 0$) indicam que os valores de q_x modelados por essas tábuas não diferem significativamente dos observados empiricamente, corroborando a análise de Dickson, Hardy e Waters (2013), que enfatizam a importância de escolher tábuas calibradas localmente para evitar vieses sistemáticos em estimativas de fluxo de caixa.

No entanto, em produtos com diferimento prolongado ($m = 55$) e composição de múltiplas vidas, observou-se que essas mesmas tábuas perdem aderência: a magnitude de d ultrapassou 0,25 em vários casos, e p-valores caíram para quase zero no grupo masculino. Esse resultado reforça o argumento de Cairns, Blake e Dowd (2006) de que a extrapolação de riscos de longevidade em idades avançadas exige modelos paramétricos mais flexíveis, capazes de capturar a “cauda” da mortalidade, sob pena de gerar erros de precificação significativos.

Nesse sentido, os ajustes realizados por meio das leis de HP forneceram um balanço superior entre parcimônia e poder preditivo. A 1ª Lei versão B destacou-se no Feminino,

reduzindo o *AIC* a $-735,32$ e o *RMSE* a $0,0339$, enquanto a 2ª Lei foi ideal para os grupos Masculino e Total ($AIC \approx -738,1$; $RMSE \approx 0,0332$; $R^2 \approx 0,96$), mostrando coerência com as recomendações de Wüthrich e Merz (2022) de que o uso de modelos de mortalidade de alta parametrização tende a melhorar o ajuste em segmentos etários sensíveis.

Além disso, as métricas de erro permaneceram estáveis mesmo nos produtos de último sobrevivente e nos cenários de diferimento longo, indicando que esses modelos resistem bem ao “efeito cauda” e às incertezas de sobrevivência prolongada, conforme proposto por Plat (2009).

Por fim, a análise comparativa das *RA* revelou que, enquanto os produtos simples sem diferimento mantêm coeficientes de variação moderados ($DP \leq 0,15$) e curvas quase paralelas entre modelos teóricos e paramétricos, as anuidades diferidas ($m|a$) sofrem alta volatilidade (DP até $15,16$ no Primeiro Cenário e até $11,52$ no Segundo), corroborando as conclusões de Bravo (2007) sobre o aumento de dispersão decorrente de prazos longos.

Entende-se que a adoção das tábuas B-2006 H e Tabla de Mortalidad RV-2004 – Hombres, para esses dados de mortalidade do Chile, em anuidades simples de curto prazo oferece alta aderência aos padrões locais, garantindo previsibilidade para os contratantes e evitando reajustes inesperados (Dickson; Hardy; Waters, 2013).

Já em produtos com carência prolongada ou múltiplas vidas – frequentes em planos de pensão –, a aplicação das leis de HP ajustadas assegura provisões robustas contra o risco de longevidade extrema, alinhando-se às recomendações de Wüthrich e Merz (2022) sobre a necessidade de capturar a “cauda” da mortalidade.

Para as companhias chilenas, essa estratégia híbrida otimiza a tarifação básica em contextos de baixa incerteza enquanto fornece flexibilidade e fidelidade métrica em carteiras complexas, fortalecendo a solvência em um mercado marcado pela volatilidade demográfica (Cairns; Blake; Dowd, 2006).

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As análises desenvolvidas ao longo deste trabalho demonstraram claramente como a escolha entre tábuas teóricas validadas e tábuas ajustadas por leis de mortalidade pode impactar significativamente a precificação de rendas atuariais.

Os resultados revelaram que, embora os testes de aderência frequentemente indiquem ausência de diferenças estatisticamente relevantes em cenários simplificados, os efeitos práticos – avaliados por métricas como o d de Cohen – podem ser substanciais, principalmente em produtos com longos períodos de diferimento ou múltiplas.

Ao longo das faixas etárias analisadas, ficou evidente que em idades mais avançadas, onde a longevidade extrema é um fator crucial, as tábuas ajustadas por métodos paramétricos oferecem maior segurança na precificação (Plat, 2009).

Em cenários mais simples, como produtos imediatos e com períodos curtos de cobertura, as tábuas chilenas teóricas B-2006 H e RV-2004 mostraram-se altamente aderentes, facilitando operações atuariais mais ágeis e eficazes, alinhadas às recomendações da literatura para tábuas locais calibradas (Dickson; Hardy; Waters, 2013).

No entanto, em estruturas complexas que envolvem períodos prolongados de diferimento ou múltiplas vidas, especialmente em produtos de vida conjunta e último sobrevivente, os ajustes paramétricos das leis de HP (1ª Lei versão B para Feminino e 2ª Lei para Masculino e Total) proporcionaram maior exatidão, reduzindo significativamente métricas de erro, refletindo de forma mais adequada as particularidades de cada grupo (Wüthrich; Merz, 2022).

Métodos simples, como tábuas teóricas, reduzem custos operacionais e podem gerar prêmios menores no curto prazo, mas elevam o risco de subprovisionamento e necessidade de ajustes futuros (McCarthy; Mitchell, 2000). Já métodos ajustados, embora mais caros, garantem prêmios mais estáveis e segurança financeira no longo prazo, sobretudo em produtos sensíveis à longevidade (Bravo, 2007; Plat, 2009).

Como limitação deste estudo, ressalta-se que os dados foram restritos ao contexto chileno e às tábuas específicas disponíveis, não contemplando plenamente realidades demográficas mais específicas ou mudanças recentes nos padrões de mortalidade.

Para trabalhos futuros, recomenda-se ampliar as análises utilizando bases de dados mais atualizadas e abrangentes, além de explorar técnicas avançadas como simulações estocásticas e

métodos bayesianos, possibilitando uma visão ainda mais detalhada e robusta sobre precificação atuarial e gestão de riscos biométricos (Cairns; Blake; Dowd, 2006; Plat, 2009).

REFERÊNCIAS

ALBA, U. N. **Introducción a la estadística: Econometría y Biometría Actuarial**. Madrid: [s.n.], 1965.

AZEVEDO, Gustavo H. W. de. **Seguros, matemática atuarial e financeira - 2ED**. Rio de Janeiro: Grupo GEN, 2018. E-book. ISBN 9788547233068. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788547233068/>. Acesso em: 28 ago. 2024.

BELTRÃO, Kaizô I.; SUGAHARA, S.; SILVA, Danilo C. da; SALLES, Elder V. **Tábuas de mortalidade no mercado brasileiro de seguros - uma comparação**. Rio de Janeiro: Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (Ipea), 2004. Disponível em: <https://repositorio.ipea.gov.br/handle/11058/1948>. Acesso em: 8 set. 2024.

BILAL, Usama *et al.* **Life expectancy and mortality in 363 cities of Latin America**. *Nature Medicine*, v. 27, p. 463–470, mar. 2021. DOI: 10.1038/s41591-020-01214-4.

BOATENG, Abigail Yeboah; OMARI-SASU, Akoto Yaw; BOATENG, Maxwell Akwasi. **Stochastic mortality models with birth cohort effects in older people: a systematic review**. *African Journal of Empirical Research*, v. 5, n. 4, p. 1496–1504, 2024.

BOOTH, H.; TICKLE, L. **Mortality modelling and forecasting: a review of methods**. *Annals of Actuarial Science*, v. 3, n. 1-2, p. 3-43, 2008.

BOWERS, Newton L.; GERBER, Hans U.; HICKMAN, James C.; JONES, Donald D. **Actuarial Mathematics**. 2. ed. [S.l.]: Society of Actuaries, 1997.

BRAVO, Jorge M. V. **Tábuas de mortalidade contemporâneas e prospectivas: modelos estocásticos, aplicações actuariais e cobertura do risco de longevidade**. 566 p. (Tese de Doutorado em Economia) | Universidade de Évora, Évora. 2007.

BROUHNS, Natacha; DENUIT, Michel; VERMUNT, Jeroen K. **A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables**. *Insurance: Mathematics and Economics*, v. 31, p. 373–393, 2002.

CAPP, Edison; NIENOV, Otto Henrique. **Bioestatística Quantitativa Aplicada**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2020.

CAIRNS, Andrew J. G.; BLAKE, David; DOWD, Kevin. **A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty: Theory and calibration**. *Journal of Risk and Insurance*, v. 73, n. 4, p. 687-718, 2006.

CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: Teoria e Aplicações - Exercícios Resolvidos e Propostos**, 2ª edição. Rio de Janeiro: Grupo GEN, 2014. E-book. ISBN 9788522487790. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788522487790/>. Acesso em: 02 set. 2024.

CUI, Jiajia. **Longevity risk pricing**. Apresentado no Living to 100 and Beyond Symposium, Orlando, FL, 7 a 9 jan. 2008.

DIAS, Jaqueline L. **Aplicações da tábua de vida**: um estudo sobre a mortalidade dos usuários do plano de saúde Pró-Saúde. 39 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Ciências Atuariais) – Universidade de Brasília, Brasília, 2014. Disponível em: <https://bdm.unb.br/handle/10483/8698>. Acesso em: 8 set. 2024.

DICKSON, David C. M.; HARDY, Mary R.; WATERS, Howard R. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. 2. ed. Cambridge University Press, New York: Sheridan Inc., 2013.

FERREIRA, Paulo Pereira. **Matemática Atuarial**: riscos de pessoas. Rio de Janeiro: Ens-CPES, 2019. 260 p.

GUIMARÃES, Paulo Ricardo Bittencourt. **Métodos Quantitativos Estatísticos**. Curitiba: IESDE Brasil S.A., 2008. 245 p.

HAZRA, Avijit; GOGTAY, Nithya. **Biostatistics series module 3**: Comparing groups: Numerical variables. *Indian Journal of Dermatology*, v. 61, n. 3, p. 251-260, 2016. DOI: 10.4103/0019-5154.182416.

HELIGMAN, L.; POLLARD, J. H. **The age pattern of mortality**. *Journal Of The Institute Of Actuaries*. United Kingdom, p. 49-80. jan. 1980.

HOGG, Robert V.; MCKEAN, Joseph W.; CRAIG, Allen T. **Introduction to Mathematical Statistics**. 8. ed. Harlow, Essex: Pearson Education Limited, 2020. ISBN 978-1-292-26476-9.

HUMAN MORTALITY DATABASE. Berkeley (CA) and Munich: University of California, Berkeley, and Max Planck Institute for Demographic Research, s.d. Disponível em: <https://mortality.org/>. Acesso em: 27 fev. 2025.

LAURETTO, Marcelo S. **Modelos paramétricos de mortalidade**: aplicações no contexto brasileiro. 2008. 211 f. Dissertação (Mestrado em Estatística) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008. Disponível em: <https://teses.usp.br/teses/disponiveis/95/95131/tde-16062008-130319/publico/lauretto.pdf>. Acesso em: 21 dez. 2024.

LEE, Ronald D.; CARTER, Lawrence R. **Modeling and forecasting U.S. mortality**. *Journal of the American Statistical Association*, v. 87, n. 419, p. 659-671, 1992.

MCCARTHY, David; MITCHELL, Olivia S. **Assessing the impact of mortality assumptions on annuity valuation**: Cross-country evidence. In: *North American Actuarial Journal*, v. 4, n. 4, p. 31-52, 2000. Disponível em: <https://pensionresearchcouncil.wharton.upenn.edu/publications/papers-2018/assessing-the-impact-of-mortality-assumptions-on-annuity-valuation-cross-country-evidence/>. Acesso em: 15 set. 2024.

MOSHER, Jessica. **Mortality and the provision of retirement income**. *OECD Journal: Financial Market Trends*, v. 2022/1, p. 43-65, 2022. Disponível em: https://www.oecd.org/en/publications/mortality-and-the-provision-of-retirement-income_a10a6c09-en.html. Acesso em: 10 out. 2024.

OLIVEIRA, Mario de; BERTHO, Ana C. S.; COSTA, Bruno; SOMMERLATTE SILVA, Flávia; ALVES, Mariane B.; RAMOS RAMIREZ, Milton; BORGES, Rafael B. de R.; MARQUES, Reinaldo; ROSA, Ricardo M. da S.; PEREGRINO, Rodrigo L.; LOBO, Viviana das G. R.; FONSECA, Thais C. O. **Tábuas de mortalidade BR-EMS 2021 do mercado segurador brasileiro**. Revista Brasileira de Estudos de População, [S. l.], v. 40, p. 1–24, 2023. DOI: 10.20947/S0102-3098a0252. Disponível em: <https://rebep.org.br/revista/article/view/2264>. Acesso em: 16 set. 2024.

OLIVEIRA, Mário de; FRISCHKAT, Ricardo; RAMIREZ, Milton; BELTRÃO, Kaizô; PINHEIRO, Sonotê. **Tábuas biométricas de mortalidade e sobrevivência: experiência do mercado segurador brasileiro** 2010. Rio de Janeiro: Funenseg, 2012. 112 p. ISBN 978-85-7052-548-2.

PASCARIU, M. **MortalityLaws: Parametric Mortality Models, Life Tables and HMD**. R package version 2.1.0. 2024. Disponível em: <https://CRAN.R-project.org/package=MortalityLaws>.

PIRES, Magda Carvalho; CASTRO, Matheus Barros; LIEBER, Zaba Valtuille; MENEZES, Thais Pacheco; AOKI, Raquel Yuri da Silveira. **Estatística não paramétrica básica no software R: uma abordagem por resolução de problemas**. Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais, 2018.

PIRES, Danilo Machado; MARQUES, Reinaldo; FERREIRA, Leandro; COSTA, Leonardo Henrique. **Fundamentos da Matemática Atuarial: vida e pensões**. Curitiba: CRV, 2021. 304 p.

PLAT, Richard. **On stochastic mortality modeling**. Insurance: Mathematics and Economics, v. 45, n. 3, p. 393-404, 2009.

PRESTON, Samuel H; HEUVELINE, Patrick; GUILLOT, Michel. **Demography: measuring and modeling population processes**. Malden, MA: Blackwell Publishers, 2001. 291 p.

QUEIROZ, Bernardo L.; GONZAGA, Marcos Roberto; LIMA, Everton E. Campos De. **New and old paradigms on mortality: evolution of mortality patterns in Latin America**. In: IUSSP INTERNATIONAL CONFERENCE, 2013, Busan, South Korea. Anais do IUSSP International Conference, 2013.

REVISTA BRASILEIRA DE ATUÁRIA. Rio de Janeiro: Instituto Brasileiro de Atuária, v. 1, n. 1, 2017. Disponível em: https://atuarios.org.br/wp-content/uploads/2021/11/rev_bras_atuaria_1.pdf?utm_source. Acesso em: 5 mai. 2025.

RÍOS, Alejandro R.; PEÑA, Ana M. P. **Estadística inferencial. Elección de una prueba estadística no paramétrica en investigación científica**. Horizonte de la Ciencia, [S. l.], v. 10, n. 19, p. 191–208, 2020. DOI: 10.26490/uncp.horizonte.ciencia.2020.19.597. Disponível em: <https://revistas.uncp.edu.pe/index.php/horizontedelaciencia/article/view/597>. Acesso em: 2 sep. 2024.

RODRIGUES, José A. **Gestão de Risco Atuarial**. Rio de Janeiro: Grupo GEN, 2012. E-book. ISBN 9788502088986. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788502088986/>. Acesso em: 28 ago. 2024.

SANTOS JÚNIOR, Luiz C.; AZEVEDO, F. I. X. de; TSUNEMI, M. H. **Efeitos da mortalidade geral brasileira sobre o cálculo atuarial: uma comparação entre modelos preditivos**. Revista Evidenciação Contábil; Finanças, v. 7, n. 2, p. 79-101, mai./ago. 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.22478/ufpb.2318-1001.2019v7n2.42335>. Acesso em: 8 set. 2024.

SOCIETY OF ACTUARIES. **Mortality tables**. Disponível em: <https://mort.soa.org/>. Acesso em: 05 maio 2025.

SPIEGEL, Murray R.; SCHILLER, John J.; SRINIVASAN, R A. **Probabilidade e estatística. (Schaum)**. Porto Alegre: Grupo A, 2013. E-book. ISBN 9788565837477. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788565837477/>. Acesso em: 27 ago. 2024.

TEIXEIRA, Luiz Frederico Horácio de S. B.; GOMES, Carlos Francisco Simões; SANTOS, Marcos dos. **Revisitando os Testes de Aderência à Curva Normal: Contribuições para a Engenharia de Produção**. In: XL Encontro Nacional de Engenharia de Produção, 20-23 out. 2020, Foz do Iguaçu. Anais [...]. Foz do Iguaçu: ENEGEP, 2020.

VIOT, Mauricio. **Seguro de pessoas, de saúde e planos de saúde**. Rio de Janeiro: ENS, 2019. 100 p.

WÜTHRICH, Mario V.; MERZ, Michael. **Statistical Foundations of Actuarial Learning and its Applications**. 1. ed. Cham: Springer, 2022. 605 p. (Springer Actuarial). ISBN 978-3-031-12409-9. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-031-12409-9>. Acesso em: 02 set. 2024.

APÊNDICES

APÊNDICE A - CÓDIGO

```

rm(list=ls()); gc()
if(!require(dplyr)) install.packages("dplyr")
if(!require(lmtest)) install.packages("lmtest")
if(!require(car)) install.packages("car")
if(!require(nortest)) install.packages("nortest")
if(!require(readxl)) install.packages("readxl")
if(!require(MortalityLaws)) install.packages("MortalityLaws")
if(!require(ggplot2)) install.packages("ggplot2")
if(!require(lifecontingencies)) install.packages("lifecontingencies")
if(!require(knitr)) install.packages("knitr")
if(!require(kableExtra)) install.packages("kableExtra")
if(!require(plotly)) install.packages("plotly")
if(!require(tidyr)) install.packages("tidyr")
if(!require(tidyverse)) install.packages("tidyverse")
library(dplyr); library(lmtest); library(car); library(nortest);
library(readxl); library(MortalityLaws); library(ggplot2);
library(lifecontingencies); library(knitr); library(kableExtra);
library(plotly); library(tidyr); library(tidyverse)
read_qx <- function(path, name_qx) { read_table2(path) %>% select(Year, Age, qx) %>%
rename(!name_qx := qx)}
total_qx <- read_qx("Tabua de mortalidade - total.txt", "qx_total")
masc_qx <- read_qx("Tabua de mortalidade - masculina.txt", "qx_masculina")
fem_qx <- read_qx("Tabua de mortalidade - feminina.txt", "qx_feminina")
dados <- list(total_qx, masc_qx, fem_qx) %>% reduce(inner_join, by = c("Year", "Age"))
dados <- dados %>% rename(year = Year, age = Age, female = qx_feminina, male =
qx_masculina, total = qx_total)
dados$year <- as.numeric(dados$year)
dados$age <- as.numeric(gsub("\\+", "", dados$age))
dados$female <- as.numeric(dados$female)
dados$male <- as.numeric(dados$male)
dados$total <- as.numeric(dados$total)
dados <- dados %>% mutate(across(c("female", "male", "total"), ~ ifelse(. > 1, 1, .)))
anos <- sort(unique(dados$year))
anos <- anos[anos >= 2012 & anos <= 2020]
plotar_por_grupo <- function(data, anos_grupo, sexo, titulo_sexo){
  dados_grupo <- subset(data, year %in% anos_grupo)
  op <- par(no.readonly = TRUE)
  par(mar = c(5, 5, 4, 2), cex.main = 2, cex.lab = 1.5, cex.axis = 1.3, las = 1)
  on.exit(par(op))
  x_lim <- c(70, max(data$age, na.rm = TRUE))
  y_lim <- range(dados_grupo[[sexo]], na.rm = TRUE)
  plot(x_lim, y_lim, type = "n", xlab = "Idade", ylab = "q(x)", main = paste(titulo_sexo, "(",
min(anos_grupo), "-", max(anos_grupo), ")"))
  grid(nx = NULL, ny = NULL, col = "gray80", lty = "dotted")
  #cores <- rev(gray.colors(n = length(anos_grupo), start = 0.2, end = 0.8))
  cores <- rainbow(n = length(anos_grupo))
  linhas <- 1:length(anos_grupo)

```

```

for(i in seq_along(anos_grupo)){ano_atual <- anos_grupo[i]; dados_ano <- subset(data, year
== ano_atual)
if(nrow(dados_ano) > 0)
  lines(dados_ano$age, dados_ano[[sexo]], col = cores[i], lwd = 2, lty = linhas[i])
  legend("topleft", legend = anos_grupo, col = cores, lwd = 2, lty = linhas, bty = "n", cex =
1.5)
}
plotar_por_grupo(dados, anos, "male", "Masculino")
plotar_por_grupo(dados, anos, "female", "Feminino")
plotar_por_grupo(dados, anos, "total", "Total")
# =====
# PARTE 1: Testes de Aderência
# =====
prob_cols <- c("female", "male", "total")
resultados <- data.frame(year = numeric(0), prob = character(0), n = numeric(0), shapiro =
numeric(0), stringsAsFactors = FALSE)
for(yr in anos){
  dados_ano <- filter(dados, year == yr)
  n_obs <- nrow(dados_ano)
  for(col in prob_cols){
    vec <- dados_ano[[col]]
    p_shapiro <- NA
    if(n_obs >= 3 & length(unique(vec)) > 1){p_shapiro <- shapiro.test(vec)$p.value}
    resultados <- rbind(resultados, data.frame(year = yr, prob = col, n = n_obs, shapiro =
p_shapiro, stringsAsFactors = FALSE))
  }
}
resultados_maiores <- resultados %>% group_by(prob) %>% slice_max(shapiro, n = 3,
with_ties = FALSE) %>% ungroup() %>% arrange(prob, shapiro)
resultados_maiores <- resultados_maiores %>% mutate(shapiro = formatC(shapiro, format =
"e", digits = 2))
kable(resultados_maiores, format = "html", caption = "3 Maiores p-valores (Shapiro) por
Sexo e Ano", col.names = c("Ano", "Sexo", "n_obs", "p-valor Shapiro"), align = "c") %>%
kable_styling(bootstrap_options = c("striped", "hover", "condensed", "responsive"))
# Tábuas Aderentes
tabuas <- read_xls("Tábuas Chilenas - TCC.xls", col_names = TRUE)
names(tabuas)[1] <- "age"
tabuas <- tabuas %>%
  mutate(age = as.numeric(age),
         across(-age, ~ as.numeric(gsub(",", ".", as.character(.))))))
tabua_names <- setdiff(names(tabuas), "age")
for(col in tabua_names){
  first_one_index <- which(tabuas[[col]] == 1)[1]
  if(!is.na(first_one_index) & first_one_index < nrow(tabuas))
    tabuas[[col]][(first_one_index + 1):nrow(tabuas)] <- NA
}
aderencia <- data.frame(year = numeric(0), prob = character(0), tabua = character(0), n =
numeric(0),
                        ks_stat = numeric(0), ks_p = numeric(0), mae = numeric(0), rmse =
numeric(0),
                        chi_stat = numeric(0), chi_p = numeric(0), r2 = numeric(0),

```

```

        stringsAsFactors = FALSE)
calc_metrics <- function(obs, exp){
  mae <- mean(abs(obs - exp))
  rmse <- sqrt(mean((obs - exp)^2))
  list(mae = mae, rmse = rmse)
}
for(yr in anos){
  dados_ano <- filter(dados, year == yr)
  for(col in prob_cols){
    obs_data <- dados_ano %>% select(age, prob = all_of(col))
    merged_data <- merge(obs_data, tabuas, by = "age")
    if(nrow(merged_data) > 1){
      for(t in tabua_names){
        obs_vals <- merged_data$prob
        exp_vals <- merged_data[[t]]
        valid <- !is.na(obs_vals) & !is.na(exp_vals)
        obs_vals <- obs_vals[valid]
        exp_vals <- exp_vals[valid]
        if(length(obs_vals) > 1){
          D_act <- sum(obs_vals)      #  $\sum d_{k\_obs}$ 
          D_exp <- sum(exp_vals)     #  $\sum d_{k\_exp}$ 
          F_obs <- cumsum(obs_vals) / D_act
          G_exp <- cumsum(exp_vals) / D_exp
          Dev_max <- max(abs(F_obs - G_exp))
          Wks <- Dev_max * sqrt((D_act * D_exp) / (D_act + D_exp))
          ks_stat <- Wks
          ks_p <- tryCatch( ks.test(obs_vals, exp_vals)$p.value, error = function(e) NA )
          var_dx <- var(obs_vals)
          chi_stat <- sum((obs_vals - exp_vals)^2 / var_dx)
          chi_df <- length(obs_vals) - 1
          chi_p <- pchisq(chi_stat, df = chi_df, lower.tail = FALSE)
          metrics <- calc_metrics(obs_vals, exp_vals)
          r2 <- 1 - sum((obs_vals - exp_vals)^2) / sum((obs_vals - mean(obs_vals))^2)
          aderencia <- rbind(aderencia, data.frame(year = yr, prob = col, tabua = t,
            n = length(obs_vals),
            ks_stat = ks_stat,
            ks_p = ks_p,
            mae = metrics$mae,
            rmse = metrics$rmse,
            chi_stat = chi_stat,
            chi_p = chi_p,
            r2 = r2,
            stringsAsFactors = FALSE
          ))
        }
      }
    }
  }
}
ks_summary <- aderencia %>% group_by(prob, tabua) %>%
  summarise(
    `KS` = min(ks_stat, na.rm = TRUE),
    `p-valor KS` = ks_p[which.min(ks_stat)],
    .groups = "drop"

```

```

) %>%
group_by(prob) %>%
slice_min(KS, n = 5, with_ties = FALSE) %>%
arrange(prob, KS)
chi_summary <- aderencia %>%
group_by(prob, tabua) %>%
summarise(
  "X2" = min(chi_stat, na.rm = TRUE),
  "p-valor X2" = chi_p[which.min(chi_stat)],
  .groups = "drop"
) %>%
group_by(prob) %>%
slice_min(X2, n = 5, with_ties = FALSE) %>%
arrange(prob, X2)
best_ks_tabs <- ks_summary %>% select(prob, tabua)
best_chi_tabs <- chi_summary %>% select(prob, tabua)
metrics_ks <- aderencia %>%
semi_join(best_ks_tabs, by = c("prob", "tabua")) %>%
group_by(prob, tabua) %>%
summarise(
  `Menor MAE` = min(mae, na.rm = TRUE),
  `Menor RMSE` = min(rmse, na.rm = TRUE),
  `Melhor R2` = max(r2, na.rm = TRUE),
  `p-valor KS` = ks_p[which.min(ks_stat)],
  .groups = "drop"
) %>%
arrange(prob, `Menor MAE`)
metrics_chi <- aderencia %>%
semi_join(best_chi_tabs, by = c("prob", "tabua")) %>%
group_by(prob, tabua) %>%
summarise(
  `Menor MAE` = min(mae, na.rm = TRUE),
  `Menor RMSE` = min(rmse, na.rm = TRUE),
  `Melhor R2` = max(r2, na.rm = TRUE),
  `p-valor Qui2` = chi_p[which.min(chi_stat)],
  .groups = "drop"
) %>%
arrange(prob, `Menor MAE`)
ks_summary %>%
rename(Sexo = prob, Tábua = tabua) %>%
kable("html", caption = "Top 5 Tábuas – Estatística KS e p-valor") %>%
kable_styling("striped", full_width = FALSE)
chi_summary %>%
rename(Sexo = prob, Tábua = tabua) %>%
kable("html", caption = "Top 5 Tábuas – Estatística Qui2 e p-valor") %>%
kable_styling("striped", full_width = FALSE)
metrics_ks %>%
rename(Sexo = prob, Tábua = tabua) %>%
kable("html", caption = "MAE, RMSE, R2 e p-valor KS – Tábuas Seleccionadas pelo KS")
%>%

```

```

kable_styling("striped", full_width = FALSE)
metrics_chi %>%
  rename(Sexo = prob, Tábua = tabua) %>%
  kable("html", caption = "MAE, RMSE, R2 e p-valor Qui2 – Tábuas Seleccionadas pelo Qui-
quadrado") %>%
  kable_styling("striped", full_width = FALSE)
# =====
# PARTE 2: Ajuste de Leis de Mortalidade
# =====
laws <- c("gompertz", "makeham", "HP2", "HP3", "HP4")
overall_metrics <- data.frame(year = numeric(0), prob = character(0), model = character(0),
AIC = numeric(0), BIC = numeric(0), RMSE = numeric(0), MAE = numeric(0), R2 =
numeric(0), stringsAsFactors = FALSE)
for(yr in anos){
  for(tipo in prob_cols){
    dados_subset <- dados %>% filter(year == yr) %>% select(age, qx = all_of(tipo))
    dados_subset <- dados_subset %>% mutate(qx = ifelse(qx > 1, 1, qx), qx = ifelse(is.na(qx),
0, qx)) %>% filter(qx > 0)
    if(nrow(dados_subset) >= 10){
      metrics_list <- list()
      for(i in seq_along(laws)){
        law_name <- laws[i]
        fit <- tryCatch({MortalityLaw(x = dados_subset$age, qx = dados_subset$qx, law =
law_name)}, error = function(e){message(paste("Erro:", law_name, yr, tipo, e$message))
return(NULL) })
        if(!is.null(fit) & !is.null(fit$fitted)){
          fitted_values <- fit$fitted
          obs <- dados_subset$qx
          n_obs <- length(obs)
          rmse_val <- sqrt(mean((obs - fitted_values)^2))
          mae_val <- mean(abs(obs - fitted_values))
          r2_val <- 1 - sum((obs - fitted_values)^2) / sum((obs - mean(obs))^2)
          k <- length(fit$coefficients)
          rss <- sum((obs - fitted_values)^2)
          aic_val <- n_obs * log(rss/n_obs) + 2 * k
          bic_val <- n_obs * log(rss/n_obs) + log(n_obs) * k
          metrics_list[[law_name]] <- data.frame(year = yr, prob = tipo, model = law_name, AIC
= aic_val, BIC = bic_val, RMSE = rmse_val, MAE = mae_val, R2 = r2_val, stringsAsFactors
= FALSE)
        }}
      if(length(metrics_list) > 0){
        metrics_df <- do.call(rbind, metrics_list)
        overall_metrics <- rbind(overall_metrics, metrics_df)
      }}}
ranking <- overall_metrics %>% group_by(prob) %>% mutate(rank_AIC = rank(AIC,
ties.method = "min"), rank_BIC = rank(BIC, ties.method = "min"), rank_RMSE =
rank(RMSE, ties.method = "min"), rank_MAE = rank(MAE, ties.method = "min"), rank_R2
= rank(-R2, ties.method = "min"), combined_rank = rank_AIC + rank_BIC + rank_RMSE +
rank_MAE + rank_R2) %>% ungroup() %>% arrange(prob, combined_rank)

```

```

top1_modelos <- ranking %>% group_by(prob) %>% slice_min(combined_rank, n = 1,
with_ties = FALSE) %>% ungroup() %>% arrange(prob) %>% select(year, prob, model,
AIC, BIC, RMSE, MAE, R2)
kable(top1_modelos, format = "html", caption = "Top 1 Modelo (por Sexo) – Valores
Individuais dos Testes", col.names = c("Ano", "Sexo", "Modelo", "AIC", "BIC", "RMSE",
"MAE", "R2"), align = "c") %>% kable_styling(bootstrap_options = c("striped", "hover",
"condensed", "responsive"))
# =====
# PARTE 3: Comparação dos Métodos – Rendas Atuariais
# =====
top_model_female <- top1_modelos$model[top1_modelos$prob == "female"]
top_tabua_female <- "B-2006 H"
top_model_male <- top1_modelos$model[top1_modelos$prob == "male"]
top_tabua_male <- "Tabla de Mortalidad RV-2004 - Hombres"
top_model_total <- top1_modelos$model[top1_modelos$prob == "total"]
top_tabua_total <- "B-2006 H"
qx_theo_f <- tabuas[[top_tabua_female]]
qx_theo_f_clean <- qx_theo_f[!is.na(qx_theo_f)]
TVteof <- probs2lifetable(qx_theo_f_clean, type = "qx", radix = 100000, name =
paste("Tábua Teórica -", top_tabua_female, "- Feminina"))
qx_theo_m <- tabuas[[top_tabua_male]]
qx_theo_m_clean <- qx_theo_m[!is.na(qx_theo_m)]
TVteom <- probs2lifetable(qx_theo_m_clean, type = "qx", radix = 100000, name =
paste("Tábua Teórica -", top_tabua_male, "- Masculina"))
qx_theo_t <- tabuas[[top_tabua_total]]
qx_theo_t_clean <- qx_theo_t[!is.na(qx_theo_t)]
TVteot <- probs2lifetable(qx_theo_t_clean, type = "qx", radix = 100000, name =
paste("Tábua Teórica -", top_tabua_total, "- Total"))
ano_recente <- max(dados$year, na.rm = TRUE)
dados_recente <- dados %>% filter(year == ano_recente)
fit_f <- MortalityLaw(x = dados_recente$age, qx = dados_recente$female, law =
top_model_female)
qx_adj_f <- ifelse(fit_f$fitted > 1, 1, fit_f$fitted)
TVadjf <- probs2lifetable(qx_adj_f, type = "qx", radix = 100000, name = paste("Tábua
Ajustada -", top_model_female, "- Feminina"))
fit_m <- MortalityLaw(x = dados_recente$age, qx = dados_recente$male, law =
top_model_male)
qx_adj_m <- ifelse(fit_m$fitted > 1, 1, fit_m$fitted)
TVadjm <- probs2lifetable(qx_adj_m, type = "qx", radix = 100000, name = paste("Tábua
Ajustada -", top_model_male, "- Masculina"))
fit_t <- MortalityLaw(x = dados_recente$age, qx = dados_recente$total, law =
top_model_total)
qx_adj_t <- ifelse(fit_t$fitted > 1, 1, fit_t$fitted)
TVadjt <- probs2lifetable(qx_adj_t, type = "qx", radix = 100000, name = paste("Tábua
Ajustada -", top_model_total, "- Total"))
single_life_products <- function(x, w, i, v, l, n = 1, m = 0, range = TRUE){
  compute_products_for_age <- function(x_current){
    if(x_current > w) stop("A idade x deve ser <= w.")
    aAIVA_disc <- sum(v^(0:(w - x_current)) * (l[x_current + (0:(w - x_current)) + 1] /
l[x_current + 1]))

```

```

aAIVP_disc <- if((w - x_current) >= 1) sum(v^(1:(w - x_current)) * (l[x_current + (1:(w -
x_current)) + 1] / l[x_current + 1])) else NA
aADVA_disc <- if((w - x_current) >= m) sum(v^(m:(w - x_current)) * (l[x_current +
(m:(w - x_current)) + 1] / l[x_current + 1])) else NA
aADVP_disc <- if((w - x_current) >= (m + 1)) sum(v^((m + 1):(w - x_current)) *
(l[x_current + ((m + 1):(w - x_current)) + 1] / l[x_current + 1])) else NA
aAITA_disc <- sum(v^(0:(n - 1)) * (l[x_current + (0:(n - 1)) + 1] / l[x_current + 1]))
aAITP_disc <- sum(v^(1:n) * (l[x_current + (1:n) + 1] / l[x_current + 1]))
if((w - x_current) >= (m + n - 1)){
  t_seq10a <- m:(m + n - 1)
  aADTA_disc <- sum(v^(t_seq10a) * (l[x_current + t_seq10a + 1] / l[x_current + 1]))
  t_seq10b <- (m + 1):(m + n)
  aADTP_disc <- sum(v^(t_seq10b) * (l[x_current + t_seq10b + 1] / l[x_current + 1]))
} else {
  aADTA_disc <- NA; aADTP_disc <- NA
}
data.frame(age = x_current, aAIVA_disc = aAIVA_disc, aAIVP_disc = aAIVP_disc,
  aADVA_disc = aADVA_disc, aADVP_disc = aADVP_disc,
  aAITA_disc = aAITA_disc, aAITP_disc = aAITP_disc,
  aADTA_disc = aADTA_disc, aADTP_disc = aADTP_disc)
}
ages <- if(range) x:w else x
do.call(rbind, lapply(ages, compute_products_for_age))
}
#-----
x_val <- 0; i_val <- 0.04; v_val <- 1/(1 + i_val); n_val <- 10; m_val <- 55
#-----
w_val_teof <- getOmega(TVteof); lx_teof <- TVteof@lx
resultados_TVteof <- single_life_products(x = x_val, w = w_val_teof, i = i_val, v = v_val, l =
lx_teof, n = n_val, m = m_val, range = TRUE)
w_val_teom <- getOmega(TVteom); lx_teom <- TVteom@lx
resultados_TVteom <- single_life_products(x = x_val, w = w_val_teom, i = i_val, v = v_val, l
= lx_teom, n = n_val, m = m_val, range = TRUE)
w_val_teot <- getOmega(TVteot); lx_teot <- TVteot@lx
resultados_TVteot <- single_life_products(x = x_val, w = w_val_teot, i = i_val, v = v_val, l =
lx_teot, n = n_val, m = m_val, range = TRUE)
w_val_TVadjf <- getOmega(TVadjf); lx_TVadjf <- TVadjf@lx
resultados_TVadjf <- single_life_products(x = x_val, w = w_val_TVadjf, i = i_val, v = v_val,
l = lx_TVadjf, n = n_val, m = m_val, range = TRUE)
w_val_TVadjm <- getOmega(TVadjm); lx_TVadjm <- TVadjm@lx
resultados_TVadjm <- single_life_products(x = x_val, w = w_val_TVadjm, i = i_val, v =
v_val, l = lx_TVadjm, n = n_val, m = m_val, range = TRUE)
w_val_TVadjt <- getOmega(TVadjt); lx_TVadjt <- TVadjt@lx
resultados_TVadjt <- single_life_products(x = x_val, w = w_val_TVadjt, i = i_val, v = v_val,
l = lx_TVadjt, n = n_val, m = m_val, range = TRUE)
compare_product_by_age_mod <- function(ax_teo, ax_adj, product_name, start_age){
  common_length <- min(length(ax_teo), length(ax_adj))
  Age <- start_age:(start_age + common_length - 1)
  RA <- ax_teo[1:common_length] / ax_adj[1:common_length]
  df_detail <- data.frame(Age = Age, RA = RA)
}

```

```

names(df_detail)[names(df_detail) == "RA"] <- paste(product_name, "RA", sep = "_")
ax_teo_common <- ax_teo[1:common_length]
ax_adj_common <- ax_adj[1:common_length]
n_common <- common_length
var_teo <- var(ax_teo_common, na.rm = TRUE)
var_adj <- var(ax_adj_common, na.rm = TRUE)
sigma_p <- sqrt(((n_common - 1) * var_teo + (n_common - 1) * var_adj) / (2 * n_common -
2))
d_cohen <- if(sigma_p > 0) (mean(ax_teo_common, na.rm = TRUE) -
mean(ax_adj_common, na.rm = TRUE)) / sigma_p else NA
group <- c(rep("teo", n_common), rep("adj", n_common))
ranks <- rank(c(ax_teo_common, ax_adj_common))
R_teo <- sum(ranks[group == "teo"])
U <- n_common * n_common + (n_common * (n_common + 1)) / 2 - R_teo
mw_test <- tryCatch(wilcox.test(ax_teo_common, ax_adj_common, exact = FALSE), error
= function(e) list(p.value = NA))
p_value <- mw_test$p.value
df_detail[[paste(product_name, "d", sep = "_")] <- d_cohen
df_detail[[paste(product_name, "U", sep = "_")] <- U
df_detail[[paste(product_name, "p", sep = "_")] <- p_value
df_detail
}
compare_all_products_by_age_mod <- function(results_teo, results_adj, product_names,
start_age){
  product_details <- lapply(product_names, function(prod){
    df <- compare_product_by_age_mod(results_teo[[prod]], results_adj[[prod]], prod,
start_age)
    df
  })
  min_max_age <- min(sapply(product_details, function(df){ max(df$Age, na.rm = TRUE)
}))
  product_details <- lapply(product_details, function(df){ df[df$Age <= min_max_age, ] })
  Reduce(function(x, y) merge(x, y, by = "Age", all = TRUE), product_details)
}
product_names <- c("aAIVA_disc", "aAIVP_disc", "aADVA_disc", "aADVP_disc",
"aAITA_disc", "aAITP_disc", "aADTA_disc", "aADTP_disc")
df_female <- compare_all_products_by_age_mod(results_teo = resultados_TVteof,
results_adj = resultados_TVadjf, product_names = product_names, start_age = x_val)
names(df_female)[-1] <- paste("female -", names(df_female)[-1])
df_male <- compare_all_products_by_age_mod(results_teo = resultados_TVteom, results_adj
= resultados_TVadjm, product_names = product_names, start_age = x_val)
names(df_male)[-1] <- paste("male -", names(df_male)[-1])
df_total <- compare_all_products_by_age_mod(results_teo = resultados_TVteot, results_adj
= resultados_TVadjt, product_names = product_names, start_age = x_val)
names(df_total)[-1] <- paste("total -", names(df_total)[-1])
clean_comparison_df <- function(df){
  for(col in names(df)[grepl("RA|d", names(df))])
    df[[col]][df[[col]] < 0] <- 0
  df
}

```

```

df_female <- clean_comparison_df(df_female)
df_male <- clean_comparison_df(df_male)
df_total <- clean_comparison_df(df_total)
df_female_RA <- df_female %>% select(contains("_RA"))
df_male_RA <- df_male %>% select(contains("_RA"))
df_total_RA <- df_total %>% select(contains("_RA"))
df_female_RA_long <- df_female_RA %>% pivot_longer(cols = everything(), names_to =
"Produto", values_to = "Valor") %>% mutate(Produto = gsub("female - ", "", Produto),
Produto = gsub("_RA", "", Produto)) %>% group_by(Produto) %>% summarise(mean =
mean(Valor, na.rm = TRUE), sd = sd(Valor, na.rm = TRUE), min = min(Valor, na.rm =
TRUE), max = max(Valor, na.rm = TRUE))
df_male_RA_long <- df_male_RA %>% pivot_longer(cols = everything(), names_to =
"Produto", values_to = "Valor") %>% mutate(Produto = gsub("male - ", "", Produto), Produto
= gsub("_RA", "", Produto)) %>% group_by(Produto) %>% summarise(mean = mean(Valor,
na.rm = TRUE), sd = sd(Valor, na.rm = TRUE), min = min(Valor, na.rm = TRUE), max =
max(Valor, na.rm = TRUE))
df_total_RA_long <- df_total_RA %>% pivot_longer(cols = everything(), names_to =
"Produto", values_to = "Valor") %>% mutate(Produto = gsub("total - ", "", Produto), Produto
= gsub("_RA", "", Produto)) %>% group_by(Produto) %>% summarise(mean = mean(Valor,
na.rm = TRUE), sd = sd(Valor, na.rm = TRUE), min = min(Valor, na.rm = TRUE), max =
max(Valor, na.rm = TRUE))
df_female_p <- df_female %>% select(Age, contains("_p")) %>% pivot_longer(-Age,
names_to = "Produto", values_to = "Valor") %>% mutate(Produto = gsub("female - ", "",
Produto), Produto = gsub("_p", "", Produto)) %>% group_by(Produto) %>%
summarise(Female = first(Valor))
df_male_p <- df_male %>% select(Age, contains("_p")) %>% pivot_longer(-Age, names_to
= "Produto", values_to = "Valor") %>% mutate(Produto = gsub("male - ", "", Produto),
Produto = gsub("_p", "", Produto)) %>% group_by(Produto) %>% summarise(Male =
first(Valor))
df_total_p <- df_total %>% select(Age, contains("_p")) %>% pivot_longer(-Age, names_to =
"Produto", values_to = "Valor") %>% mutate(Produto = gsub("total - ", "", Produto), Produto
= gsub("_p", "", Produto)) %>% group_by(Produto) %>% summarise(Total = first(Valor))
df_U_table <- df_female_p %>% full_join(df_male_p, by = "Produto") %>%
full_join(df_total_p, by = "Produto")
df_female_d_val <- df_female %>% select(Age, contains("_disc_d")) %>% pivot_longer(-
Age, names_to = "Produto", values_to = "Valor") %>% mutate(Produto = gsub("female - ",
"", Produto), Produto = gsub("_d$", "", Produto)) %>% group_by(Produto) %>%
summarise(Female = first(Valor))
df_male_d_val <- df_male %>% select(Age, contains("_disc_d")) %>% pivot_longer(-Age,
names_to = "Produto", values_to = "Valor") %>% mutate(Produto = gsub("male - ", "",
Produto), Produto = gsub("_d$", "", Produto)) %>% group_by(Produto) %>%
summarise(Male = first(Valor))
df_total_d_val <- df_total %>% select(Age, contains("_disc_d")) %>% pivot_longer(-Age,
names_to = "Produto", values_to = "Valor") %>% mutate(Produto = gsub("total - ", "",
Produto), Produto = gsub("_d$", "", Produto)) %>% group_by(Produto) %>%
summarise(Total = first(Valor))
df_d_table <- df_female_d_val %>% full_join(df_male_d_val, by = "Produto") %>%
full_join(df_total_d_val, by = "Produto")

```

```

df_female_long <- df_female %>% pivot_longer(-Age, names_to = "Produto", values_to =
"Valor") %>% filter(grepl("RA", Produto)) %>% mutate(Produto = gsub("female - ", "",
Produto), Produto = gsub("_RA", "", Produto))
df_male_long <- df_male %>% pivot_longer(-Age, names_to = "Produto", values_to =
"Valor") %>% filter(grepl("RA", Produto)) %>% mutate(Produto = gsub("male - ", "",
Produto), Produto = gsub("_RA", "", Produto))
df_total_long <- df_total %>% pivot_longer(-Age, names_to = "Produto", values_to =
"Valor") %>% filter(grepl("RA", Produto)) %>% mutate(Produto = gsub("total - ", "",
Produto), Produto = gsub("_RA", "", Produto))
two_life_products<-function(x,y,w,i,l,n=1,m=0,range=TRUE){
  compute_products_for_age<-function(x_current,y_current){
    if(x_current>w) stop("A idade x deve ser <= w.")
    if(y_current>w) stop("A idade y excede w.")
    v<-1/(1+i); L_factor<-function(a,t){1/[a+t+1]/[a+1]}; max_age<-max(x_current,y_current)
    joint_aAIVA_disc<-sum(v^(0:(w-max_age))*L_factor(x_current,0:(w-
max_age))*L_factor(y_current,0:(w-max_age)))
    joint_aAIVP_disc<-if((w-max_age)>=1) sum(v^(1:(w-
max_age))*L_factor(x_current,1:(w-max_age))*L_factor(y_current,1:(w-max_age))) else NA
    joint_aADVA_disc<-if((w-max_age)>=m) sum(v^(m:(w-
max_age))*L_factor(x_current,m:(w-max_age))*L_factor(y_current,m:(w-max_age))) else
NA
    joint_aADVP_disc<-if((w-max_age)>=(m+1)) sum(v^((m+1):(w-
max_age))*L_factor(x_current,(m+1):(w-max_age))*L_factor(y_current,(m+1):(w-
max_age))) else NA
    joint_aAITA_disc<-sum(v^(0:(n-1))*L_factor(x_current,0:(n-1))*L_factor(y_current,0:(n-
1)))
    joint_aAITP_disc<-sum(v^(1:n)*L_factor(x_current,1:n)*L_factor(y_current,1:n))
    if((w-max_age)>=(m+n-1)){
      t_seq_a<-m:(m+n-1); joint_aADTA_disc<-
sum(v^(t_seq_a)*L_factor(x_current,t_seq_a)*L_factor(y_current,t_seq_a));
      t_seq_b<-(m+1):(m+n); joint_aADTP_disc<-
sum(v^(t_seq_b)*L_factor(x_current,t_seq_b)*L_factor(y_current,t_seq_b))
    } else { joint_aADTA_disc<-joint_aADTP_disc<-NA }
    last_aAIVA_disc<-sum(v^(0:(w-max_age))*L_factor(x_current,0:(w-
max_age)))+sum(v^(0:(w-max_age))*L_factor(y_current,0:(w-max_age)))-joint_aAIVA_disc
    last_aAIVP_disc<-sum(v^(1:(w-max_age))*L_factor(x_current,1:(w-
max_age)))+sum(v^(1:(w-max_age))*L_factor(y_current,1:(w-max_age)))-joint_aAIVA_disc
    last_aADVA_disc<-sum(v^(m:(w-max_age))*L_factor(x_current,m:(w-
max_age)))+sum(v^(m:(w-max_age))*L_factor(y_current,m:(w-max_age)))-
joint_aADVA_disc
    last_aADVP_disc<-sum(v^((m+1):(w-max_age))*L_factor(x_current,(m+1):(w-
max_age)))+sum(v^((m+1):(w-max_age))*L_factor(y_current,(m+1):(w-max_age)))-
joint_aADVA_disc
    last_aAITA_disc<-sum(v^(0:(n-1))*L_factor(x_current,0:(n-1)))+sum(v^(0:(n-
1))*L_factor(y_current,0:(n-1)))-joint_aAITA_disc
    last_aAITP_disc<-
sum(v^(1:n)*L_factor(x_current,1:n))+sum(v^(1:n)*L_factor(y_current,1:n))-
joint_aAITP_disc

```

```

t_seq_a<-m:(m+n-1); last_aADTA_disc<-
sum(v^(t_seq_a)*L_factor(x_current,t_seq_a))+sum(v^(t_seq_a)*L_factor(y_current,t_seq_a)
)-joint_aADTA_disc
t_seq_b<-(m+1):(m+n); last_aADTP_disc<-
sum(v^(t_seq_b)*L_factor(x_current,t_seq_b))+sum(v^(t_seq_b)*L_factor(y_current,t_seq_b
))-joint_aADTP_disc
joint_results<-
data.frame(t(c(joint_aAIVA_disc,joint_aAIVP_disc,joint_aADVA_disc,joint_aADVP_disc,jo
int_aAITA_disc,joint_aAITP_disc,joint_aADTA_disc,joint_aADTP_disc)))
names(joint_results)<-paste("joint",product_names,sep="_")
last_results<-
data.frame(t(c(last_aAIVA_disc,last_aAIVP_disc,last_aADVA_disc,last_aADVP_disc,last_a
AITA_disc,last_aAITP_disc,last_aADTA_disc,last_aADTP_disc)))
names(last_results)<-paste("last",product_names,sep="_")
list(joint=joint_results,last_survivor=last_results)
}
joint_list<-list(); last_list<-list()
while(x<=w){ res<-compute_products_for_age(x,y); joint_list[[as.character(x)]]<-res$joint;
last_list[[as.character(x)]]<-res$last_survivor; x<-x+1 }
list(joint=do.call(rbind,joint_list),last_survivor=do.call(rbind,last_list))
}
compare_two_life_products_by_age_mod<-
function(results_teo,results_adj,tipo=c("joint","last_survivor")){
tipo<-match.arg(tipo); product_names<-names(results_teo[[tipo]])
product_details<-lapply(product_names,function(prod){
compare_product_by_age_mod(results_teo[[tipo]][[prod]],results_adj[[tipo]][[prod]],prod,star
t_age=x_val) })
Reduce(function(x,y) merge(x,y,by="Age",all=TRUE),product_details)
}
#-----
y_val<-x_val+10
#-----
result_two_lives_teof<-
two_life_products(x_val,y_val,w_val_teof,i_val,TVteof@lx,n_val,m_val,range=TRUE)
result_two_lives_adjf<-
two_life_products(x_val,y_val,w_val_TVadjf,i_val,TVadjf@lx,n_val,m_val,range=TRUE)
result_two_lives_tecom<-
two_life_products(x_val,y_val,w_val_tecom,i_val,TVteom@lx,n_val,m_val,range=TRUE)
result_two_lives_adjm<-
two_life_products(x_val,y_val,w_val_TVadjm,i_val,TVadjm@lx,n_val,m_val,range=TRUE)
result_two_lives_teot<-
two_life_products(x_val,y_val,w_val_teot,i_val,TVteot@lx,n_val,m_val,range=TRUE)
result_two_lives_adjt<-
two_life_products(x_val,y_val,w_val_TVadjt,i_val,TVadjt@lx,n_val,m_val,range=TRUE)
df_joint_female<-
compare_two_life_products_by_age_mod(result_two_lives_teof,result_two_lives_adjf,tipo="
joint")
df_last_female<-
compare_two_life_products_by_age_mod(result_two_lives_teof,result_two_lives_adjf,tipo="
last_survivor")

```

```

df_joint_male<-
compare_two_life_products_by_age_mod(result_two_lives_teom,result_two_lives_adjm,tipo
="joint")
df_last_male<-
compare_two_life_products_by_age_mod(result_two_lives_teom,result_two_lives_adjm,tipo
="last_survivor")
df_joint_total<-
compare_two_life_products_by_age_mod(result_two_lives_teot,result_two_lives_adjt,tipo="j
oint")
df_last_total<-
compare_two_life_products_by_age_mod(result_two_lives_teot,result_two_lives_adjt,tipo="l
ast_survivor")
# Vida Conjunta - tabelas
df_joint_female_p<-df_joint_female %>% select(Age,contains("_p")) %>% pivot_longer(-
Age,names_to="Produto",values_to="Valor") %>% mutate(Produto=gsub("_p","",Produto))
%>% group_by(Produto) %>% summarise(Female=first(Valor))
df_joint_male_p<-df_joint_male %>% select(Age,contains("_p")) %>% pivot_longer(-
Age,names_to="Produto",values_to="Valor") %>% mutate(Produto=gsub("_p","",Produto))
%>% group_by(Produto) %>% summarise(Male=first(Valor))
df_joint_total_p<-df_joint_total %>% select(Age,contains("_p")) %>% pivot_longer(-
Age,names_to="Produto",values_to="Valor") %>% mutate(Produto=gsub("_p","",Produto))
%>% group_by(Produto) %>% summarise(Total=first(Valor))
df_joint_U_table<-df_joint_female_p %>% full_join(df_joint_male_p,by="Produto") %>%
full_join(df_joint_total_p,by="Produto")
df_joint_female_d<-df_joint_female %>% select(Age,contains("_disc_d")) %>%
pivot_longer(-Age,names_to="Produto",values_to="Valor") %>%
mutate(Produto=gsub("_d$","",Produto)) %>% group_by(Produto) %>%
summarise(Female=first(Valor))
df_joint_male_d<-df_joint_male %>% select(Age,contains("_disc_d")) %>% pivot_longer(-
Age,names_to="Produto",values_to="Valor") %>% mutate(Produto=gsub("_d$","",Produto))
%>% group_by(Produto) %>% summarise(Male=first(Valor))
df_joint_total_d<-df_joint_total %>% select(Age,contains("_disc_d")) %>% pivot_longer(-
Age,names_to="Produto",values_to="Valor") %>% mutate(Produto=gsub("_d$","",Produto))
%>% group_by(Produto) %>% summarise(Total=first(Valor))
df_joint_d_table<-df_joint_female_d %>% full_join(df_joint_male_d,by="Produto") %>%
full_join(df_joint_total_d,by="Produto")
# Último Sobrevivente - tabelas
df_last_female_p<-df_last_female %>% select(Age,contains("_p")) %>% pivot_longer(-
Age,names_to="Produto",values_to="Valor") %>% mutate(Produto=gsub("_p","",Produto))
%>% group_by(Produto) %>% summarise(Female=first(Valor))
df_last_male_p<-df_last_male %>% select(Age,contains("_p")) %>% pivot_longer(-
Age,names_to="Produto",values_to="Valor") %>% mutate(Produto=gsub("_p","",Produto))
%>% group_by(Produto) %>% summarise(Male=first(Valor))
df_last_total_p<-df_last_total %>% select(Age,contains("_p")) %>% pivot_longer(-
Age,names_to="Produto",values_to="Valor") %>% mutate(Produto=gsub("_p","",Produto))
%>% group_by(Produto) %>% summarise(Total=first(Valor))
df_last_U_table<-df_last_female_p %>% full_join(df_last_male_p,by="Produto") %>%
full_join(df_last_total_p,by="Produto")
df_last_female_d<-df_last_female %>% select(Age,contains("_disc_d")) %>%
pivot_longer(-Age,names_to="Produto",values_to="Valor") %>%

```

```

mutate(Producto=gsub("_d$", "", Producto)) %>% group_by(Producto) %>%
summarise(Female=first(Valor))
df_last_male_d<-df_last_male %>% select(Age,contains("_disc_d")) %>% pivot_longer(-
Age,names_to="Producto",values_to="Valor") %>% mutate(Producto=gsub("_d$", "", Producto))
%>% group_by(Producto) %>% summarise(Male=first(Valor))
df_last_total_d<-df_last_total %>% select(Age,contains("_disc_d")) %>% pivot_longer(-
Age,names_to="Producto",values_to="Valor") %>% mutate(Producto=gsub("_d$", "", Producto))
%>% group_by(Producto) %>% summarise(Total=first(Valor))
df_last_d_table<-df_last_female_d %>% full_join(df_last_male_d,by="Producto") %>%
full_join(df_last_total_d,by="Producto")
# Vida Conjunta - gráficos
df_joint_female_RA_long<-df_joint_female %>% select(contains("_RA")) %>%
pivot_longer(cols=everything(),names_to="Producto",values_to="Valor") %>%
mutate(Producto=gsub("_RA", "", Producto)) %>% group_by(Producto) %>%
summarise(mean=mean(Valor,na.rm=TRUE),sd=sd(Valor,na.rm=TRUE),min=min(Valor,na.
rm=TRUE),max=max(Valor,na.rm=TRUE))
df_joint_female_long<-df_joint_female %>% pivot_longer(-
Age,names_to="Producto",values_to="Valor") %>% filter(grepl("RA",Producto)) %>%
mutate(Producto = gsub("_RA", "", Producto))
df_joint_male_RA_long<-df_joint_male %>% select(contains("_RA")) %>%
pivot_longer(cols=everything(),names_to="Producto",values_to="Valor") %>%
mutate(Producto=gsub("_RA", "", Producto)) %>% group_by(Producto) %>%
summarise(mean=mean(Valor,na.rm=TRUE),sd=sd(Valor,na.rm=TRUE),min=min(Valor,na.
rm=TRUE),max=max(Valor,na.rm=TRUE))
df_joint_male_long<-df_joint_male %>% pivot_longer(-
Age,names_to="Producto",values_to="Valor") %>% filter(grepl("RA",Producto)) %>%
mutate(Producto = gsub("_RA", "", Producto))
df_joint_total_RA_long<-df_joint_total %>% select(contains("_RA")) %>%
pivot_longer(cols=everything(),names_to="Producto",values_to="Valor") %>%
mutate(Producto=gsub("_RA", "", Producto)) %>% group_by(Producto) %>%
summarise(mean=mean(Valor,na.rm=TRUE),sd=sd(Valor,na.rm=TRUE),min=min(Valor,na.
rm=TRUE),max=max(Valor,na.rm=TRUE))
df_joint_total_long<-df_joint_total %>% pivot_longer(-
Age,names_to="Producto",values_to="Valor") %>% filter(grepl("RA",Producto)) %>%
mutate(Producto = gsub("_RA", "", Producto))
# Último Sobreviviente - gráficos
df_last_female_RA_long<-df_last_female %>% select(contains("_RA")) %>%
pivot_longer(cols=everything(),names_to="Producto",values_to="Valor") %>%
mutate(Producto=gsub("_RA", "", Producto)) %>% group_by(Producto) %>%
summarise(mean=mean(Valor,na.rm=TRUE),sd=sd(Valor,na.rm=TRUE),min=min(Valor,na.
rm=TRUE),max=max(Valor,na.rm=TRUE))
df_last_female_long<-df_last_female %>% pivot_longer(-
Age,names_to="Producto",values_to="Valor") %>% filter(grepl("RA",Producto)) %>%
mutate(Producto = gsub("_RA", "", Producto))
df_last_male_RA_long<-df_last_male %>% select(contains("_RA")) %>%
pivot_longer(cols=everything(),names_to="Producto",values_to="Valor") %>%
mutate(Producto=gsub("_RA", "", Producto)) %>% group_by(Producto) %>%
summarise(mean=mean(Valor,na.rm=TRUE),sd=sd(Valor,na.rm=TRUE),min=min(Valor,na.
rm=TRUE),max=max(Valor,na.rm=TRUE))

```

```

df_last_male_long<-df_last_male %>% pivot_longer(-
Age,names_to="Producto",values_to="Valor") %>% filter(grepl("RA",Producto)) %>%
mutate(Producto = gsub("_RA", "", Producto))
df_last_total_RA_long<-df_last_total %>% select(contains("_RA")) %>%
pivot_longer(cols=everything(),names_to="Producto",values_to="Valor") %>%
mutate(Producto=gsub("_RA", "",Producto)) %>% group_by(Producto) %>%
summarise(mean=mean(Valor,na.rm=TRUE),sd=sd(Valor,na.rm=TRUE),min=min(Valor,na.
rm=TRUE),max=max(Valor,na.rm=TRUE))
df_last_total_long<-df_last_total %>% pivot_longer(-
Age,names_to="Producto",values_to="Valor") %>% filter(grepl("RA",Producto)) %>%
mutate(Producto = gsub("_RA", "", Producto))
# Renomear as anuidades
renomear_nomes <- function(nomes) {
  mapeamento <- c("aAIVA_disc" = "äx", "aAIVP_disc" = "ax", "aADVA_disc" = "m|äx",
"aADVP_disc" = "m|ax", "aAITA_disc" = "äx:n", "aAITP_disc" = "ax:n", "aADTA_disc" =
"m|äx:n", "aADTP_disc" = "m|ax:n", "joint_aAIVA_disc" = "äxy", "joint_aAIVP_disc" =
"axy", "joint_aADVA_disc" = "m|äxy", "joint_aADVP_disc" = "m|axy", "joint_aAITA_disc"
= "äxy:n", "joint_aAITP_disc" = "axy:n", "joint_aADTA_disc" = "m|äxy:n",
"joint_aADTP_disc" = "m|axy:n", "last_aAIVA_disc" = "ä|xy|", "last_aAIVP_disc" = "a|xy|",
"last_aADVA_disc" = "m|ä|xy|", "last_aADVP_disc" = "m|a|xy|", "last_aAITA_disc" =
"ä|xy|:n", "last_aAITP_disc" = "a|xy|:n", "last_aADTA_disc" = "m|ä|xy|:n",
"last_aADTP_disc" = "m|a|xy|:n")
  novos_nomes <- sapply(nomes, function(nome) {
    if (nome %in% names(mapeamento))
      mapeamento[nome]
    else
      nome
  }, USE.NAMES = FALSE)
  return(novos_nomes)
}
df_female_long$Producto <- renomear_nomes(df_female_long$Producto);
df_male_long$Producto <- renomear_nomes(df_male_long$Producto); df_total_long$Producto
<- renomear_nomes(df_total_long$Producto)
df_joint_female_long$Producto <- renomear_nomes(df_joint_female_long$Producto);
df_joint_male_long$Producto <- renomear_nomes(df_joint_male_long$Producto);
df_joint_total_long$Producto <- renomear_nomes(df_joint_total_long$Producto)
df_last_female_long$Producto <- renomear_nomes(df_last_female_long$Producto);
df_last_male_long$Producto <- renomear_nomes(df_last_male_long$Producto);
df_last_total_long$Producto <- renomear_nomes(df_last_total_long$Producto)
# Gráficos Comparativos
df_female_long <- df_female_long %>% mutate(type = "Individual")
df_joint_female_long <- df_joint_female_long %>% mutate(type = "Vida Conjunta")
df_last_female_long <- df_last_female_long %>% mutate(type = "Último Sobrevivente")
df_male_long <- df_male_long %>% mutate(type = "Individual")
df_joint_male_long <- df_joint_male_long %>% mutate(type = "Vida Conjunta")
df_last_male_long <- df_last_male_long %>% mutate(type = "Último Sobrevivente")
df_total_long <- df_total_long %>% mutate(type = "Individual")
df_joint_total_long <- df_joint_total_long %>% mutate(type = "Vida Conjunta")
df_last_total_long <- df_last_total_long %>% mutate(type = "Último Sobrevivente")
df_last_female_long_posi <- df_last_female_long %>% mutate(Valor = abs(Valor))

```

```

df_last_male_long_posi <- df_last_male_long %>% mutate(Valor = abs(Valor))
df_last_total_long_posi <- df_last_total_long %>% mutate(Valor = abs(Valor))
# Combina os dataframes
df_comparacaof <- bind_rows(df_female_long, df_joint_female_long,
df_last_female_long_posi)
df_comparacaom <- bind_rows(df_male_long, df_joint_male_long, df_last_male_long_posi)
df_comparacaot <- bind_rows(df_total_long, df_joint_total_long, df_last_total_long_posi)
df_comparacaof1 <- bind_rows(df_female_long, df_joint_female_long, df_last_female_long)
df_comparacaom1 <- bind_rows(df_male_long, df_joint_male_long, df_last_male_long)
df_comparacaot1 <- bind_rows(df_total_long, df_joint_total_long, df_last_total_long)
# Feminino - RA
df_comparacaof2 <- df_comparacaof %>% mutate(pagamento = ifelse(grepl("ä", Produto),
"Antecipado", "Postecipado"), baseProduto = gsub("\\\\?(xy|x)\\\\?", "\\_", Produto) %>%
gsub("[ä]", "a", .))
ggplot(df_comparacaof2, aes(x = Age, y = Valor, color = type, linetype = pagamento)) +
  geom_line(size = 1.2) +
  facet_wrap(~ baseProduto, scales = "fixed") +
  coord_cartesian(ylim = c(0.5, 3)) +
  labs(title = "Comparação de RA - Feminino", x = "Idade", y = "Razão de Anuidade (RA)",
color = "Tipo de Anuidade", linetype = "Forma de Pagamento") +
  scale_linetype_manual(values = c("Antecipado" = "solid", "Postecipado" = "twodash")) +
  scale_color_manual(values = c("Individual" = "blue", "Vida Conjunta" = "green", "Último
Sobrevivente" = "red")) +
  theme_bw(base_size = 10) +
  theme(plot.title = element_text(face = "bold", size = 17, hjust = 0.5), axis.title =
element_text(face = "bold", size = 14), axis.text = element_text(size = 13), strip.text =
element_text(face = "bold", size = 12), legend.title = element_text(face = "bold", size = 14),
legend.text = element_text(size = 14), legend.position = "bottom")
tabela_resumo <- df_comparacaof1 %>% group_by(Produto, type) %>%
summarise(Media_RA = round(mean(Valor, na.rm = TRUE), 4), Desvio_Padrao =
round(sd(Valor, na.rm = TRUE), 4), Minimo = round(min(Valor, na.rm = TRUE), 4),
Maximo = round(max(Valor, na.rm = TRUE), 4)) %>% arrange(Produto, type)
tabela_resumo %>% kable("html", caption = "Tabela Resumo das Estatísticas de RA por
Produto e Tipo de Anuidade - Feminino") %>% kable_styling(bootstrap_options =
c("striped", "hover", "responsive"), full_width = FALSE) %>% column_spec(1, bold =
TRUE) %>% pack_rows(index = table(tabela_resumo$Produto))
# Masculino - RA
df_comparacaom2 <- df_comparacaom %>% mutate(pagamento = ifelse(grepl("ä", Produto),
"Antecipado", "Postecipado"), baseProduto = gsub("\\\\?(xy|x)\\\\?", "\\_", Produto) %>%
gsub("[ä]", "a", .))
ggplot(df_comparacaom2, aes(x = Age, y = Valor, color = type, linetype = pagamento)) +
  geom_line(size = 1.2) +
  facet_wrap(~ baseProduto, scales = "fixed") +
  coord_cartesian(ylim = c(0.5, 3)) +
  labs(title = "Comparação de RA - Masculino", x = "Idade", y = "Razão de Anuidade (RA)",
color = "Tipo de Anuidade", linetype = "Forma de Pagamento") +
  scale_linetype_manual(values = c("Antecipado" = "solid", "Postecipado" = "twodash")) +
  scale_color_manual(values = c("Individual" = "blue", "Vida Conjunta" = "green", "Último
Sobrevivente" = "red")) +
  theme_bw(base_size = 10) +

```

```

theme(plot.title = element_text(face = "bold", size = 17, hjust = 0.5), axis.title =
element_text(face = "bold", size = 14), axis.text = element_text(size = 13), strip.text =
element_text(face = "bold", size = 12), legend.title = element_text(face = "bold", size = 14),
legend.text = element_text(size = 14), legend.position = "bottom")
tabela_resumo_m <- df_comparacaom1 %>% group_by(Produto, type) %>%
summarise(Media_RA = round(mean(Valor, na.rm = TRUE), 4), Desvio_Padrao =
round(sd(Valor, na.rm = TRUE), 4), Minimo = round(min(Valor, na.rm = TRUE), 4),
Maximo = round(max(Valor, na.rm = TRUE), 4)) %>% arrange(Produto, type)
tabela_resumo_m %>% kable("html", caption = "Tabela Resumo das Estatísticas de RA por
Produto e Tipo de Anuidade - Masculino") %>% kable_styling(bootstrap_options =
c("striped", "hover", "responsive"), full_width = FALSE) %>% column_spec(1, bold =
TRUE) %>% pack_rows(index = table(tabela_resumo_m$Produto))
# Total - RA
df_comparacaot2 <- df_comparacaot %>% mutate(pagamento = ifelse(grepl("ä", Produto),
"Antecipado", "Postecipado"), baseProduto = gsub("\\|?(xy|x)\\|?", "\\_", Produto) %>%
gsub("[ä]", "a", .))
ggplot(df_comparacaot2, aes(x = Age, y = Valor, color = type, linetype = pagamento)) +
geom_line(size = 1.2) +
facet_wrap(~ baseProduto, scales = "fixed") +
coord_cartesian(ylim = c(0.5, 3)) +
labs(title = "Comparação de RA - Total", x = "Idade", y = "Razão de Anuidade (RA)", color
= "Tipo de Anuidade", linetype = "Forma de Pagamento") +
scale_linetype_manual(values = c("Antecipado" = "solid", "Postecipado" = "twodash")) +
scale_color_manual(values = c("Individual" = "blue", "Vida Conjunta" = "green", "Último
Sobrevivente" = "red")) +
theme_bw(base_size = 10) +
theme(plot.title = element_text(face = "bold", size = 17, hjust = 0.5), axis.title =
element_text(face = "bold", size = 14), axis.text = element_text(size = 13), strip.text =
element_text(face = "bold", size = 12), legend.title = element_text(face = "bold", size = 14),
legend.text = element_text(size = 14), legend.position = "bottom")
tabela_resumo_t <- df_comparacaot1 %>% group_by(Produto, type) %>%
summarise(Media_RA = round(mean(Valor, na.rm = TRUE), 4), Desvio_Padrao =
round(sd(Valor, na.rm = TRUE), 4), Minimo = round(min(Valor, na.rm = TRUE), 4),
Maximo = round(max(Valor, na.rm = TRUE), 4)) %>% arrange(Produto, type)
tabela_resumo_t %>% kable("html", caption = "Tabela Resumo das Estatísticas de RA por
Produto e Tipo de Anuidade - Total") %>% kable_styling(bootstrap_options = c("striped",
"hover", "responsive"), full_width = FALSE) %>% column_spec(1, bold = TRUE) %>%
pack_rows(index = table(tabela_resumo_t$Produto))
# Estatística U
df_individual_U <- df_U_table %>% mutate(tipo = "Individual"); df_joint_U <-
df_joint_U_table %>% mutate(tipo = "Vida Conjunta"); df_last_U <- df_last_U_table %>%
mutate(tipo = "Último Sobrevivente")
df_U_combined <- bind_rows(df_individual_U, df_joint_U, df_last_U)
df_U_combined$Produto <- renomear_nomes(df_U_combined$Produto)
df_U_long <- df_U_combined %>% pivot_longer(cols = c("Female", "Male", "Total"),
names_to = "Group", values_to = "U_value")
df_U_long <- df_U_long %>% mutate(Group_Produto = interaction(tipo, Group, sep = " - "))
#color_mapping <- c("Individual - Total" = "#FFFFFF", "Individual - Male" = "#555555",
"Individual - Female" = "#000000", "Vida Conjunta - Total" = "#F7F7F7", "Vida Conjunta -
Male" = "#777777", "Vida Conjunta - Female" = "#333333", "Último Sobrevivente - Total" =

```

```

"#fdfd", "Último Sobrevivente - Male" = "#999999", "Último Sobrevivente - Female" =
"#666666")
color_mapping <- c("Individual - Total" = "#084081", "Individual - Male" = "#2171b5",
"Individual - Female" = "#4292c6", "Vida Conjunta - Total" = "#00441b", "Vida Conjunta -
Male" = "#238b45", "Vida Conjunta - Female" = "#66c2a4", "Último Sobrevivente - Total" =
"#7f2704", "Último Sobrevivente - Male" = "#a63603", "Último Sobrevivente - Female" =
"#d94801")
ggplot(df_U_long, aes(x = Produto, y = U_value, fill = Group_Produto)) +
  geom_bar(stat = "identity", position = position_dodge(width = 0.8), width = 0.6, color =
"black") +
  scale_fill_manual(values = color_mapping) +
  labs(title = "Comparação da Estatística U", x = "Produto", y = "Estatística U (p-valor)", fill =
"Grupo") +
  theme_bw(base_size = 14) +
  theme(plot.title = element_text(face = "bold", size = 17, hjust = 0.5), axis.title =
element_text(face = "bold", size = 15), axis.text = element_text(size = 12, angle=45,
hjust=1), legend.title = element_text(face = "bold", size = 14), legend.text =
element_text(size = 11), legend.position = "bottom")
df_U_table$Produto <- renomear_nomes(df_U_table$Produto)
tabela_U <- df_U_table %>% select(Produto, Female, Male, Total) %>% rename(Feminino =
Female, Masculino = Male, Total = Total)
kable(tabela_U, format = "html", caption = "Estatística U por Produto Individual e Grupo",
col.names = c("Produto", "Feminino", "Masculino", "Total"), align = "c") %>%
kable_styling(bootstrap_options = c("striped", "hover", "condensed", "responsive"))
df_joint_U_table$Produto <- renomear_nomes(df_joint_U_table$Produto)
tabela_U_vc <- df_joint_U_table %>% select(Produto, Female, Male, Total) %>%
rename(Feminino = Female, Masculino = Male, Total = Total)
kable(tabela_U_vc, format = "html", caption = "Estatística U por Produto Vida Conjunta e
Grupo", col.names = c("Produto", "Feminino", "Masculino", "Total"), align = "c") %>%
kable_styling(bootstrap_options = c("striped", "hover", "condensed", "responsive"))
df_last_U_table$Produto <- renomear_nomes(df_last_U_table$Produto)
tabela_U_us <- df_last_U_table %>% select(Produto, Female, Male, Total) %>%
rename(Feminino = Female, Masculino = Male, Total = Total)
kable(tabela_U_us, format = "html", caption = "Estatística U por Produto Último
Sobrevivente e Grupo", col.names = c("Produto", "Feminino", "Masculino", "Total"), align =
"c") %>% kable_styling(bootstrap_options = c("striped", "hover", "condensed",
"responsive"))
# Estatística d
df_individual_d <- df_d_table %>% mutate(tipo = "Individual"); df_joint_d <-
df_joint_d_table %>% mutate(tipo = "Vida Conjunta"); df_last_d <- df_last_d_table %>%
mutate(tipo = "Último Sobrevivente")
df_d_combined <- bind_rows(df_individual_d, df_joint_d, df_last_d)
df_d_combined$Produto <- renomear_nomes(df_d_combined$Produto)
df_d_long <- df_d_combined %>% pivot_longer(cols = c("Female", "Male", "Total"),
names_to = "Group", values_to = "d_value")
df_d_long <- df_d_long %>% mutate(Group_Produto = interaction(tipo, Group, sep = " - "))
df_d_long <- df_d_long %>% mutate(d_value = abs(d_value))
ggplot(df_d_long, aes(x = Produto, y = d_value, fill = Group_Produto)) +
  geom_bar(stat = "identity", position = position_dodge(width = 0.8), width = 0.6, color =
"black") +

```

```

scale_fill_manual(values = color_mapping) +
labs(title = "Comparação da Estatística d", x = "Produto", y = "Estatística d ", fill = "Grupo")
+
theme_bw(base_size = 14) +
theme(plot.title = element_text(face = "bold", size = 17, hjust = 0.5), axis.title =
element_text(face = "bold", size = 15), axis.text = element_text(size = 12, angle = 45, hjust =
1), legend.title = element_text(face = "bold", size = 14), legend.text = element_text(size =
11), legend.position = "bottom")
df_d_table$Produto <- renomear_nomes(df_d_table$Produto)
tabela_d <- df_d_table %>% select(Produto, Female, Male, Total) %>% rename(Feminino =
Female, Masculino = Male, Total = Total)
kable(tabela_d, format = "html", caption = "Estatística d por Produto Individual e Grupo",
col.names = c("Produto", "Feminino", "Masculino", "Total"), align = "c") %>%
kable_styling(bootstrap_options = c("striped", "hover", "condensed", "responsive"))
df_joint_d_table$Produto <- renomear_nomes(df_joint_d_table$Produto)
tabela_d_vc <- df_joint_d_table %>% select(Produto, Female, Male, Total) %>%
rename(Feminino = Female, Masculino = Male, Total = Total)
kable(tabela_d_vc, format = "html", caption = "Estatística d por Produto Vida Conjunta e
Grupo", col.names = c("Produto", "Feminino", "Masculino", "Total"), align = "c") %>%
kable_styling(bootstrap_options = c("striped", "hover", "condensed", "responsive"))
df_last_d_table$Produto <- renomear_nomes(df_last_d_table$Produto)
tabela_d_us <- df_last_d_table %>% select(Produto, Female, Male, Total) %>%
rename(Feminino = Female, Masculino = Male, Total = Total)
kable(tabela_d_us, format = "html", caption = "Estatística d por Produto Último Sobrevivente
e Grupo", col.names = c("Produto", "Feminino", "Masculino", "Total"), align = "c") %>%
kable_styling(bootstrap_options = c("striped", "hover", "condensed", "responsive"))

```